

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

# YAMANOUCHISATION

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUE

PAR

ABDELHAFID CHEKKAL

JUIN 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

À mon frère Athmane et son fils Yahia

À mes filles : Amina, Sarah et Maria

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le professeur Christophe Reutenauer, mon directeur de recherche, qui m'a proposé ce sujet de recherche pour le suivi constant qu'il m'a apporté tout au long de la réalisation de cette thèse. En effet, je lui suis très redevable de m'avoir supervisé et surtout pour les lectures essentielles à l'aboutissement de cette recherche. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs le professeur Robert Bédard, le professeur Christophe Hohlweg et le professeur Alain Goupil en acceptant de corriger cette thèse. Qu'ils trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui m'ont encadré.

Je tiens à remercier mes parents, ma femme, ma famille et mon ami Rabah Zerouati qui m'ont grandement soutenu et encouragé constamment à réaliser mes rêves d'accomplir mes études supérieures.

Ma reconnaissance s'étend au personnel de l'université du Québec à Montréal.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé.



# TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
ALGORITHME DE SCHENSTED ET ALGORITHME DE SCHÜTZENBERGER . . . . .	9
1.1 Diagrammes de Ferrers et partages . . . . .	9
1.2 Tableaux de Young . . . . .	13
1.3 Permutations et sous-groupes de Young . . . . .	18
1.4 Algorithme de Schensted . . . . .	22
1.4.1 Algorithme d'insertion . . . . .	24
1.4.2 Algorithme de suppression . . . . .	26
1.4.3 Algorithme de Schensted . . . . .	27
1.5 Relations de Knuth . . . . .	33
1.6 Construction géométrique de Viennot . . . . .	36
1.6.1 Squelette d'une permutation . . . . .	37
1.6.2 Squelette et correspondance de Schensted . . . . .	43
1.7 Glissements du jeu de taquin de Schützenberger . . . . .	47
1.8 Algorithme d'évacuation de Schützenberger . . . . .	53
1.8.1 Algorithme de suppression du plus petit élément . . . . .	53
1.8.2 Algorithme d'évacuation . . . . .	54
CHAPITRE II	
MOTS DE YAMANOUCHI ET STANDARDISATION . . . . .	59
2.1 Mots de Yamanouchi . . . . .	60

2.2	Généralisation d'un résultat pour $\text{read}(t)$ et $\text{row}(t)$ des tableaux de Young standards aux tableaux gauches standards . . . . .	65
2.3	Les standardisations à gauche et à droite vues à travers les arrangements de M. A. A. van Leeuwen et à travers les tableaux gauches standards . . . . .	80
2.4	Preuve géométrique naturelle . . . . .	86
2.5	Paires de Yamanouchi indécomposables . . . . .	94
CHAPITRE III		
	YAMANOUCISATION D'ALGORITHMES . . . . .	103
3.1	Algorithme de transposition d'un mot de Yamanouchi . . . . .	104
3.2	Jeu de taquin de Schützenberger sur les suffixes de mots de Yamanouchi, ayant une forme gauche donnée . . . . .	107
3.3	Algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi . . . . .	111
3.4	Algorithme donnant la correspondance de Schensted sur les mots de Yamanouchi . . . . .	115
3.4.1	Fonction d'insertion . . . . .	115
3.4.2	Fonction de suppression . . . . .	127
3.4.3	Lien avec la construction géométrique de Viennot . . . . .	142
CHAPITRE IV		
	SUR L'ALGORITHME DE ROBINSON . . . . .	149
4.1	Algorithme de Robinson . . . . .	151
4.2	Résultat de M. A. A. van Leeuwen donnant le lien entre l'algorithme de Robinson et l'algorithme de Schensted (insertion colonne) . . . . .	158
4.3	Algorithme de redressement d'un mot qui n'est pas un mot de Yamanouchi . . . . .	173
4.4	Résultat principal : L'algorithme de redressement et l'algorithme de Robinson sont équivalents . . . . .	181
4.5	Généralisation du résultat de M. A. A. van Leeuwen des permutations aux mots arbitraires . . . . .	193
4.6	Expression de l'évacué d'un mot de Yamanouchi en utilisant l'opérateur de Robinson $w \mapsto \mathcal{L}(w)$ . . . . .	213

4.7	Nouvelle formule pour la correspondance de Schensted . . . . .	216
CHAPITRE V		
	SUR UNE CONJECTURE DE SCHÜTZENBERGER . . . . .	223
5.1	Conjecture de Schützenberger . . . . .	223
5.2	Nouvelle conjecture . . . . .	224
5.3	Nouvelle conjecture implique la conjecture de Shützenberger . . . . .	230
5.4	Solution de la nouvelle conjecture pour les tableaux de Young standards ayant seulement deux lignes . . . . .	240
5.5	Nouvelle preuve du théorème de Foata . . . . .	250
CHAPITRE VI		
	PERMUTATIONS CONNEXES ET HYPERCARTES POINTÉES . . . . .	263
6.1	Hypercartes étiquetées, non étiquetées et pointées . . . . .	268
6.2	Bijection de Sillke entre les permutations connexes de $[n + 1]$ et les hypercartes pointées à $n$ points . . . . .	274
6.3	Nouvelles formules pour les permutations connexes . . . . .	285
6.4	Généralisation d'un résultat de Sillke . . . . .	308
6.5	Généralisation d'un résultat de Dumont et Kreweras . . . . .	316
6.6	Nombre de sous-groupes normaux d'indice $n$ avec $n$ premier, dans un groupe libre à deux générateurs . . . . .	328
	CONCLUSION . . . . .	339
ANNEXE A		
	NOTATIONS . . . . .	343
	RÉFÉRENCES . . . . .	357



## LISTE DES FIGURES

1.1	$\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}$ . . . . .	37
1.2	L'ombre $O((4, 5))$ . . . . .	39
1.3	La ligne saillante $L$ de $P$ . . . . .	40
1.4	$S(L)$ et $S_d^+(L)$ . . . . .	41
1.5	Les lignes saillantes de $\sigma = 3641725$ . . . . .	42
1.6	La permutation $\sigma = 3641725$ et son squelette $Sq(\sigma) = 0063047$ . . . .	43
1.7	Les squelettes successifs de $\sigma = 3641725$ . . . . .	45
3.1	Fonction d'insertion . . . . .	116
3.2	Fonction de suppression . . . . .	128
3.3	Le mot de Yamanouchi $u = \omega(P(\sigma))$ . . . . .	143
3.4	Le mot de Yamanouchi $v = \omega(Q(\sigma))$ . . . . .	144
3.5	Le mot $1 \cdot 21 \cdot 3 \cdot$ et le mot $1123$ vus à travers les squelettes de $\sigma$ . . .	145
3.6	Une partie de $Sq^1(\sigma)$ avec $\sigma(i) = k$ . . . . .	147
6.1	Une hypercarte étiquetée à 8 points. . . . .	270
6.2	Une hypercarte pointée à 7 points. . . . .	277



# RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous intéressons dans la première partie, constituée de cinq chapitres, aux mots de Yamanouchi et dans la deuxième partie, constitué d'un seul chapitre, aux permutations connexes et aux hypercartes pointées.

Dans le premier chapitre, nous donnerons un résumé des résultats connus et utilisés dans cette thèse.

Dans le chapitre 2, nous généraliserons l'expression donnant  $\text{read}(t)$  et  $\text{row}(t)$  pour  $t$  un tableau de Young standard aux tableaux gauches standards où  $\text{read}(t)$  et  $\text{row}(t)$  sont deux mots associés au tableau  $t$ . Nous donnerons une interprétation géométrique pour les standardisations à gauche et à droite d'un mot quelconque. Ensuite, nous utiliserons les arrangements de van Leeuwen pour donner une preuve naturelle à tous les résultats de ce chapitre. Nous définirons les paires de mots de Yamanouchi indécomposables et nous montrerons qu'elles sont en bijection avec les permutations connexes.

Dans le chapitre 3, nous élaborerons des algorithmes sur les mots de Yamanouchi qui sont en bijection avec les tableaux de Young standards. Ces algorithmes simuleront les algorithmes connus sur les tableaux à savoir : la transposition, les glissements du jeu taquin de Schützenberger, l'évacuation et la correspondance de Schensted.

Dans le chapitre 4, nous élaborerons un algorithme de redressement d'un mot qui n'est pas un mot de Yamanouchi. Cet algorithme similera l'algorithme connu de redressement d'un tableau gauche standard en un tableau de Young standard par une suite de glissements du jeu de taquin de Schützenberger. Nous montrerons que le mot de Yamanouchi obtenu par cet algorithme est identique au mot de Yamanouchi obtenu par un algorithme de Robinson. Nous généraliserons le résultat de van Leeuwen donnant le lien entre la correspondance de Robinson, entre les permutations et les paires de mots de Yamanouchi, et celle de Schensted, entre les permutations et les paires de tableaux de Young standards, des permutations aux mots arbitraires. Nous utiliserons le résultat obtenu pour donner une réponse à une question posée par Thomas. Nous utiliserons l'algorithme de Robinson pour donner une expression à l'évacué d'un mot de Yamanouchi. Nous utiliserons l'algorithme de redressement pour donner une nouvelle formule à la correspondance de Schensted.

Dans le chapitre 5, nous poserons une nouvelle conjecture ayant un lien étroit avec une conjecture de Schützenberger qui concerne son opération d'évacuation d'un tableau de

Young standard et avec la correspondance de Schensted. Nous montrerons que cette nouvelle conjecture implique celle de Schützenberger. Nous donnerons une solution pour cette nouvelle conjecture dans le cas particulier des tableaux ayant seulement deux lignes.

Dans le dernier chapitre, nous utiliserons les formules de Dumont et Kreweras, qui ont étudié une famille particulière de fractions continues liée à la série hypergéométrique, pour donner une nouvelle preuve aux formules donnant les permutations connexes selon leur nombre et aussi selon leur nombre de cycles. Nous établirons deux nouvelles formules pour les permutations connexes. Nous montrerons que le résultat de Sillke et celui de Dumont et Kreweras sont équivalents ensuite nous généraliserons chacun des deux résultats en passant au type cyclique au lieu du nombre de cycles. Nous généraliserons une formule donnée par Cori qui concerne les hypercartes étiquetées à  $n$  points. Nous donnons une expression à chacune des deux séries formelles donnant le nombre des permutations selon leur type cyclique et aussi le nombre des permutations connexes selon leur type cyclique. Finalement, nous donnerons le nombre de sous-groupes normaux d'indice  $n$  dans le groupe libre à deux générateurs pour  $n$  un entier premier.

**Mots clés :** Tableaux de Young standards, tableaux gauches standards, mots de Yamanoi, standardisation à gauche et à droite, transposition, glissements du jeu taquin de Schützenberger, évacuation, redressement d'un tableau gauche standard, correspondance de Schensted, correspondance de Robinson, relations de Knuth, monoïde palindromique, permutations connexes, hypercartes pointées, sous-groupes du groupe libre à deux générateurs.



# INTRODUCTION

La première partie de cette thèse porte sur les mots de Yamanouchi qui sont en bijection avec les tableaux de Young standards. Ces derniers jouent un rôle important dans divers domaines scientifiques, notamment en combinatoire, dans la théorie des représentations des groupes, dans la théorie des fonctions symétriques et dans l'étude du parallélisme en théorie informatique. Ils furent introduits par A. Young en 1902, dans son article intitulé « On Quantitative Substitutional Analysis » (Young, 1902). Young les utilisait pour calculer certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  ainsi que le calcul des matrices de représentations irréductibles de ce groupe.

La deuxième partie de cette thèse porte sur les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  qui sont en bijection avec les hypercartes pointées à  $n - 1$  points par la bijection de T. Sillke ou la bijection de P. Ossona de Mendez et P. Rosenstiehl. Les hypercartes ont été utilisées comme un outil algébrique permettant de représenter le plongement (the embedding) d'un graphe dans une surface orientable. Les permutations connexes sont aussi en bijection avec les sous-groupes d'indice  $n - 1$  du groupe libre à deux générateurs par la bijection de A. W. M. Dress et R. B. Franz.

La première partie est constituée des cinq premiers chapitres. La deuxième partie est constituée d'un seul chapitre qui est le chapitre 6.

Dans le chapitre 1, nous donnerons un résumé des résultats connus et utilisés dans cette thèse. En premier, nous donnerons des rappels sur quelques notions combinatoires énumératives simples comme les diagrammes de Ferrers, les partages, les tableaux de Young standards, les tableaux gauches standards, les permutations et les sous-groupes de Young. Ensuite, nous présenterons l'algorithme de Schensted, les relations de Knuth et la

construction géométrique de Viennot. Finalement, nous définirons les glissements du jeu de taquin de Schützenberger et nous présenterons l’algorithme de “vidage-remplissage” ou d’évacuation de Schützenberger.

Dans le chapitre 2, nous généraliserons l’expression connue donnant  $\text{read}(t)$  et  $\text{row}(t)$  pour  $t$  un tableau de Young standard aux tableaux gauches standards où  $\text{read}(t)$  et  $\text{row}(t)$  sont deux mots associés au tableau  $t$ . Ensuite, nous utiliserons les arrangements de M. A. A. van Leeuwen pour interpréter géométriquement les standardisations à gauche et à droite d’un mot quelconque. Nous utiliserons cette interprétation géométrique pour montrer d’une manière très naturelle tous les résultats de ce chapitre. Nous établirons deux formules donnant le lien entre la standardisation d’un mot, son préfixe ou son suffixe et sa restriction à un sous-ensemble de l’ensemble de ses lettres. Finalement, nous définirons une paire de Yamanouchi indécomposable. Ensuite nous montrerons que les paires de Yamanouchi indécomposables de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations connexes de l’ensemble  $[n]$ .

Dans le chapitre 3, nous allons élaborer des algorithmes sur les mots de Yamanouchi. Ces algorithmes sont compatibles avec les algorithmes correspondants sur les tableaux de Young standards donnés au chapitre 1. Plus précisément, nous allons introduire un algorithme de transposition d’un mot de Yamanouchi. Ensuite, nous traduirons le jeu de taquin de Schützenberger sur les mots. Nous définirons les glissements en avant et les glissements en arrière sur un suffixe, d’un mot de Yamanouchi, ayant une forme gauche donnée. Nous allons aussi développer un algorithme d’évacuation d’un mot de Yamanouchi. Cet algorithme d’évacuation a été déjà élaboré par D. Foata sauf que nous le donnerons d’une manière plus concise. Finalement, nous allons concevoir un algorithme pour la correspondance  $\pi$  de Schensted permettant de passer directement de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  à  $\pi(\sigma) = (u, v)$  la paire de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , sans passer par la paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda$ . Nous allons aussi élaborer un algorithme pour la correspondance  $\pi^{-1}$  permettant de

passer directement de  $(u, v)$  vers  $\sigma$ . Nous définirons des fonctions que nous appellerons fonctions d'insertion et fonctions de suppression. Ces fonctions correspondent sur les tableaux de Young standards aux algorithmes d'insertion et de suppression liés à un élément et un tableau, définis par Schensted. Finalement, nous montrerons le lien étroit de cette correspondance avec la construction géométrique de Viennot. Nous avons aperçu que la fonction d'insertion a été utilisée par Viennot dans sa preuve pour faire le lien entre les lignes saillantes des squelettes successifs d'une permutation et les mots de Yamanouchi qui codent son  $P$ -symbole et son  $Q$ -symbole (Viennot, 1976).

Dans le chapitre 4, nous donnerons des rappels sur l'algorithme de Robinson (Robinson, 1938). Cet algorithme transforme un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{L}(w)$ . Nous présenterons aussi un deuxième algorithme de Robinson relié à son premier algorithme. Ce dernier permet d'associer à chaque mot  $w$  un opérateur formel qu'on note par  $\mathcal{B}_w$ . Dans le cas particulier où  $w$  est une permutation, Robinson a utilisé l'opérateur  $\mathcal{B}_w$  pour associer à la permutation  $w$  un autre mot de Yamanouchi autre que  $\mathcal{L}(w)$  qu'on note par  $\mathcal{B}(w)$  et qui est de la même forme que  $\mathcal{L}(w)$ . Ensuite, nous donnerons le résultat de M. A. A. van Leeuwen qui donne une description précise de la relation entre les algorithmes de Robinson  $\sigma \mapsto (\mathcal{L}(\sigma), \mathcal{B}(\sigma))$  et l'algorithme de Schensted  $\sigma \mapsto (P(\sigma), Q(\sigma))$  (van Leeuwen, 1992). Notre directeur de recherche C. Reutenauer a conjecturé que si on identifie un mot  $w$  à un tableau gauche standard  $g$ , alors

$$\omega(J(g)) = \mathcal{L}(w)$$

où  $\omega(J(g))$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $J(g)$  qui est le redressé de  $g$ . Afin de donner une preuve pour cette conjecture, nous allons élaborer un algorithme de redressement d'un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi. Cet algorithme transforme le mot  $w$  en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{F}(w)$ . Il est compatible avec l'algorithme de redressement d'un tableau gauche standard donné au chapitre 1. Nous allons montrer que le mot  $\mathcal{F}(w)$  est unique. Plus précisément, nous

montrerons que

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w). \quad (0.1)$$

Ce qui donne une preuve à la conjecture de C. Reutenauer précédente. Ce résultat principal et le résultat précédent de M. A. A. van Leeuwen montrent que le lien est étroit entre les algorithmes de Robinson, l'algorithme de Schensted et l'algorithme du jeu de taquin de Schützenberger. Nous utiliserons le lien entre cet algorithme de redressement et l'algorithme d'évacuation élaboré au chapitre 3 pour montrer un théorème de Schützenberger. Nous généraliserons le résultat de M. A. A. van Leeuwen des permutations aux mots arbitraires. Cette généralisation nous permettra de résoudre un problème ouvert posé par Thomas ((Thomas, 1976), page 667) qui s'agit de trouver une formule donnant le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$ . Nous donnerons une expression de l'évacué d'un mot de Yamanouchi en utilisant l'opérateur de Robinson  $w \mapsto \mathcal{L}(w)$ . Ensuite, nous utiliserons cette expression pour montrer un résultat de van Leeuwen. Finalement, nous donnerons une nouvelle formule pour la correspondance de Schensted en utilisant l'algorithme de redressement précédent. Nous utiliserons cette formule pour montrer des résultats connus comme celui de Schensted donnant le lien entre le  $P$ -symbole d'une permutation et le  $P$ -symbole de son image miroir.

Dans le chapitre 5, nous poserons une nouvelle conjecture ayant un lien étroit avec la correspondance de Schensted et avec une conjecture de Schützenberger ((Schützenberger, 1976), page 85). Nous montrerons que la résolution de cette nouvelle conjecture implique la résolution de celle de Schützenberger. Ensuite, nous montrerons cette nouvelle conjecture, en utilisant l'algorithme donnant la correspondance de Schensted entre les permutations et les mots de Yamanouchi de même forme que nous avons élaboré au chapitre 4 précédent, dans le cas particulier des tableaux de Young standards ayant seulement deux lignes. Finalement, nous donnerons une nouvelle preuve pour le théorème de Foata qui démontre la conjecture de Schützenberger dans un cas particulier.

Dans le chapitre 6, nous donnerons des résultats sur les permutations connexes et les hypercartes pointées.

En 1949, M. Hall a établi une formule de récurrence concernant les nombres  $a_n^{(k)}$  de sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre à  $k$  générateurs (Hall, 1949). Dans le cas  $k = 2$ , les nombres  $a_n^{(2)}$  satisfont la même formule de récurrence que les nombres  $h_{n+1}$  de permutations connexes  $\sigma$  de l'ensemble  $[n + 1]$ . Une bijection entre l'ensemble des sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre à deux générateurs et l'ensemble des permutations connexes de l'ensemble  $[n + 1]$  a été construite par A. W.M. Dress et R. B. Franz (Dress et Franz, 1985).

D. Dumont et G. Kreweras ont étudié une famille particulière de fractions continues liée à la série hypergéométrique

$$\Omega(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n,$$

où  $(a)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a)_n := \sum_{\sigma \in S_n} a^{\text{cyc}(\sigma)}$  tel que  $\text{cyc}(\sigma)$  est le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$  (Dumont et Kreweras, 1988).

En utilisant le  $q$ -analogue de la série hypergéométrique, J. Zeng a établi des  $q$ -analogues de toutes les formules de Dumont-Kreweras. J. Zeng a proposé un nouveau modèle combinatoire et il a posé le problème d'établir une bijection entre ce nouveau modèle et celui de Dumont-Kreweras. Plus précisément, il a montré que le nombre des permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles et il a posé le problème de trouver une démonstration bijective de cette formule. Comme la bijection de Dress et Franz ne s'applique pas, alors T. Sillke a construit une bijection qui résout le problème posé par Zeng (Sillke, 1989). Sillke dans ((Sillke, 1989), page 1) a donné la formule suivante qui est équivalente à une formule de Dumont et Kreweras :

$$G(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = x \frac{d}{dx} (\log (\Omega(a, b; x)))$$

où pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans le polynôme  $G_n(a, b)$  est égal au nombre de sous-groupes  $H$  d'indice  $n$  du groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $r$  cycles et  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $s$  cycles. Ce nombre, par la bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles. P. Ossona de Mendez et P. Rosenstiehl ont aussi construit une bijection entre les permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  et les hypercartes pointées à  $n$  points (Ossona de Mendez et Rosenstiehl, 2004). Leur bijection associe à chaque permutation connexe  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points de sorte que le nombre de records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha$  et le nombre de cycles de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\beta$ . R. Cori a donné une description de cette bijection dans (Cori, 2008).

Nous donnerons des rappels sur les hypercartes étiquetées, non étiquetées et pointées et aussi sur les permutations connexes. Nous donnerons la nouvelle formule de récurrence suivante concernant le nombre  $h_n$  des permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  :

$$h_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 1 : n! = h_n + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n} \cdot h_p \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} i! \cdot (n-p-i)! \right).$$

Nous montrerons cette formule en utilisant les permutations pointées.

Ensuite, nous rappellerons la bijection de Sillke entre les hypercartes pointées à  $n$  points et les permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  ainsi que la bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl. Nous poserons le problème ouvert de décrire d'une manière précise le lien entre ces deux bijections.

Nous utiliserons les formules de Dumont et Kreweras données dans (Dumont et Kreweras, 1988) pour montrer les formules connues suivantes :

$$h_n = n! - \sum_{p=1}^{n-1} h_p \cdot (n-p)!,$$

$$h_n = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot (n-1-p)!,$$

$$n \cdot n! = h_{n+1} + \sum_{p=1}^{n-1} h_{p+1} \cdot (n-p)!,$$

ainsi que la nouvelle formule donnée ci-haut.

Nous utiliserons encore une autre fois les formules de Dumont et Kreweras données dans (Dumont et Kreweras, 1988) pour montrer les formules suivantes qui généralisent les formules précédentes :

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= s_{n,k} - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min(k,p)} c_{p,i} \cdot s_{n-p,k-i}, \\ c_{n,k} &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i}, \\ n \cdot s_{n,k} &= c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p+1)} c_{p+1,j} \cdot s_{n-p,k-j}, \end{aligned}$$

et

$$n \cdot s_{n,k} = n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{t=0}^{\min(k-j,i)} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right),$$

où  $s_{n,k}$  dénote le nombre des permutations de l'ensemble  $[n]$  ayant  $k$  cycles et  $c_{n,k}$  dénote le nombre des permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  ayant  $k$  cycles. La dernière formule est nouvelle.

Nous donnerons la preuve d'un résultat, conjecturé par notre directeur de recherche Christophe Reutenauer, qui généralise un résultat de Sillke. La généralisation réside dans le passage du nombre de cycles au type cyclique.

Nous utiliserons ce résultat pour montrer un résultat sur les hypercartes étiquetées à  $n$  points qui généralise un résultat donné par R. Cori (Cori, 2009, lemme 1).

Nous définissons des polynômes à plusieurs variables qui généralisent les polynômes  $F_n(a, b)$  et  $C_n(a, b)$  de Dumont et Kreweras, qu'on note par  $F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$

et par  $C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$ . Ensuite, nous montrerons un résultat qui généralise le résultat (5') donné dans ((Dumont et Kreweras, 1988), page 28). Nous généraliserons le résultat de Dumont et Kreweras en passant du nombre de cycles au type cyclique.

Nous donnerons une expression à la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$$

et aussi à la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$$

où  $\mathcal{C}_n$  dénote l'ensemble des permutations connexes de  $[n]$ .

Lorsque l'entier  $n$  est premier, nous montrerons que  $n+1$  est le nombre des sous-groupes normaux d'indice  $n$  dans le groupe libre à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$ . Trouver ce nombre lorsque  $n$  est arbitraire reste toujours un problème ouvert.



# CHAPITRE I

## ALGORITHME DE SCHENSTED ET ALGORITHME DE SCHÜTZENBERGER

Ce chapitre se veut un résumé des résultats connus et utilisés dans cette thèse. En premier, nous donnerons des rappels sur quelques notions combinatoires énumératives simples comme les diagrammes de Ferrers, les partages, les tableaux de Young standards, les tableaux gauches standards, les permutations et les sous-groupes de Young. Ensuite, nous présenterons l'algorithme de Schensted, les relations de Knuth et la construction géométrique de Viennot. Finalement, nous définirons les glissements du jeu de taquin de Schützenberger et nous présenterons l'algorithme de “vidage-remplissage” ou d'évacuation de Schützenberger.

Dans les deux premières sections de ce chapitre, nous suivrons les notes de cours de François Bergeron (Bergeron, 2001) et le livre de Bruce E. Sagan (Sagan, 2001).

### 1.1 Diagrammes de Ferrers et partages

Dans toute la suite de ce chapitre, nous considérons dans le plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  les relations d'ordre suivantes : *l'ordre naturel*  $\leq$  défini pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

et l'ordre croisé  $\leq_C$  défini pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

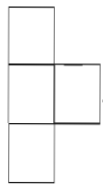
$$(x, y) \leq_C (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq x' \text{ et } y' \leq y.$$

**Définition 1** *Un diagramme est un ensemble fini  $d \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et une case de  $d$  est l'un des éléments de  $d$ .*

On représente habituellement la case  $(i, j) \in d$  au moyen du carré  $1 \times 1$  de sommets  $(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1)$  et  $(i + 1, j + 1)$  dans le quadrant  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Ainsi le diagramme

$$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1)\}$$

est représenté par le dessin



**Définition 2** *Le diagramme conjugué,  $d'$ , d'un diagramme  $d$  est l'ensemble*

$$d' = \{(j, i) \mid (i, j) \in d\}.$$

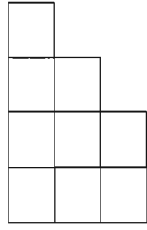
Le conjugué du diagramme ci-haut est



La conjugaison est clairement une involution.

**Définition 3** *Un diagramme  $\lambda$  est dit de Ferrers si pour tout  $(i, j) \in \lambda$ , chaque case  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  avec  $(a, b) \leq (i, j)$  est aussi dans  $\lambda$ .*

Ainsi, un diagramme  $\lambda$  est dit de Ferrers s'il est en "forme d'escalier", comme par exemple



**Définition 4** Un partage  $\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est un diagramme tel que

$$(i, j) \in \lambda \text{ et } (a, b) \leq (i, j) \text{ impliquent que } (a, b) \in \lambda.$$

En d'autres mots, un partage est un diagramme de Ferrers.

Les parts  $\lambda_i$  de  $\lambda$  sont les entiers

$$\lambda_i := |\{c \in \lambda \mid \exists x \in \mathbb{N} : c = (x, i - 1)\}|.$$

Pour les  $i$  tels que  $\lambda_i > 0$ , on a clairement  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ . Dans certaines situations, il est utile d'ajouter à  $\lambda$  un certain nombre de parts égales à 0. Un partage étant caractérisé par la taille de ses parts, on peut identifier  $\lambda$  à la liste de ses parts  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  ou simplement  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ . Pour l'exemple ci-dessus, on a  $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ . De plus, si  $\lambda$  a  $d_i$  parts de taille  $i$ , on écrit encore  $\lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}$ . On dit alors que  $d_i$  est la multiplicité de la part  $i$  dans  $\lambda$ . Pour notre exemple courant, on a  $\lambda = 1^1 2^1 3^2$ . Les parts de  $\lambda$  sont encore appelées lignes de  $\lambda$ . De même, les colonnes de  $\lambda$  sont les lignes de son conjugué  $\lambda'$

$$\lambda'_i = |\{c \in \lambda \mid \exists x \in \mathbb{N} : c = (i - 1, x)\}|.$$

Remarquons que la case  $(j - 1, i - 1)$  du diagramme  $\lambda$  est située dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Dans toute la suite de cette thèse, on note cette case par  $(i, j)$ . Ainsi, la première composante  $i$  indique le numéro de la ligne contenant cette case et la deuxième composante  $j$  indique le numéro de la colonne. Par exemple, le diagramme donné au début de cette section a les cases  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(3, 1)$ .

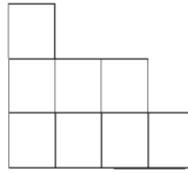
Si le nombre total de cases de  $\lambda$  est

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k,$$

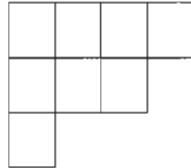
on dit que  $\lambda$  est un partage de  $n$  et on écrit  $\lambda \vdash n$ . Ainsi, on peut donner la définition suivante :

**Définition 5** *Un partage  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$  d'un entier  $n$  est une suite décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme donne  $n$ .*

Par conséquent, chaque partage a une représentation planaire qui est un diagramme de Ferrers. Nous allons utiliser le même symbole pour un partage de  $n$  et pour le diagramme de Ferrers qui lui est associé. Le diagramme ci-dessous est le diagramme de Ferrers associé au partage  $(4, 3, 1)$  de 8



Dans la littérature, on trouve souvent la représentation symétrique de celle-ci, dite "anglo- saxonne"



Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons la première représentation des diagrammes de Ferrers. Il existe un ordre qui compare les partages sur des entiers distincts. Du point de vue des diagrammes de Ferrers, c'est simplement l'inclusion et on écrit  $\mu \subseteq \lambda$  si le partage  $\mu$  est inclu dans le partage  $\lambda$  comme diagrammes de Ferrers. Comme l'intersection et l'union de partages est un partage, l'ensemble des partages ordonné par inclusion forme donc un treillis. On l'appelle le treillis de Young .

**Définition 6** *Si  $\lambda$  est un partage d'un certain entier  $n$ , alors un coin intérieur de  $\lambda$  est une case  $(i, j) \in \lambda$  qui une fois supprimée laisse un certain partage de*

$n - 1$ , c'est-à-dire que le diagramme obtenu de  $\lambda$  en supprimant cette case est aussi un diagramme de Ferrers. Chaque partage obtenu par une telle suppression est dénoté par  $\lambda^-$ . Un coin extérieur de  $\lambda$  est une case  $(i, j) \notin \lambda$  qui une fois ajoutée produit un certain partage de  $n + 1$ , c'est-à-dire que le diagramme obtenu de  $\lambda$  en ajoutant cette case est aussi un diagramme de Ferrers. Chaque partage obtenu par un tel ajout est dénoté par  $\lambda^+$ .

Par exemple, si  $\lambda = (3, 2, 1)$ , alors

$$\lambda^- = (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1)$$

et

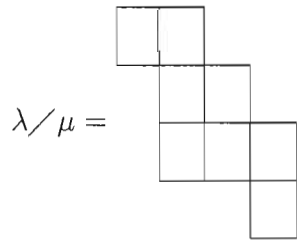
$$\lambda^+ = (3, 2, 1, 1), (3, 2, 2), (3, 3, 1), (4, 2, 1).$$

**Définition 7** Si  $\mu \subseteq \lambda$  comme diagrammes de Ferrers, alors le diagramme gauche correspondant est l'ensemble des cases

$$\lambda/\mu = \{c : c \in \lambda \text{ et } c \notin \mu\}.$$

Si  $\mu = \emptyset$ , on dit que le diagramme gauche  $\lambda/\mu$  est normal.

Ainsi, un diagramme de Ferrers est un diagramme gauche normal. Par exemple, si  $\lambda = (4, 4, 3, 2)$  et  $\mu = (3, 1, 1)$ , alors on obtient le diagramme gauche suivant :



## 1.2 Tableaux de Young

Les tableaux de Young jouent un rôle important dans divers domaines scientifiques, notamment en combinatoire. On les retrouve dans des sujets aussi divers que la théorie

des représentations du groupe symétrique et dans l'étude du parallélisme en théorie informatique. Ces tableaux sont apparus pour la première fois en 1902, dans un article de A. Young intitulé « On Quantitative Substitutional Analysis » (Young, 1902). Young les utilisait pour calculer certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  ainsi que le calcul des matrices de représentations irréductibles de ce groupe.

**Définition 8** *Pour un diagramme  $\lambda$ , un tableau  $t$  de forme  $\lambda$ , avec valeurs dans  $\{1, 2, \dots, k\}$ , est une fonction  $t : \lambda \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .*

On représente souvent un tel tableau en remplissant chaque case  $c$  de  $\lambda$  avec la valeur  $t(c)$ . Le tableau  $t$  est dit injectif si la fonction sous-jacente est injective. Par exemple, on a le tableau non injectif :

1			
3	4		
6	6	3	12
2	3	2	7

**Définition 9** *Soit  $\lambda \vdash n$ . Un tableau de Young de forme  $\lambda$  est une fonction injective  $t : \lambda \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .*

Autrement dit, on obtient le tableau  $t$  en remplissant les cases de  $\lambda$  avec les nombres de 1 à  $n$  bijectivement. Clairement, il y a  $n!$  tableaux de Young de forme  $\lambda$  pour  $\lambda \vdash n$ . Par exemple, les tableaux

3		3		2		2		1		1	
1	2	2	1	1	3	3	1	2	3	3	2

sont tous les tableaux de Young de forme  $(2, 1)$ .

Notons par  $t_{ij}$  l'entrée du tableau  $t$  située dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Ainsi,  $t_{ij} = t(i, j)$ . Par exemple, le premier tableau dans l'exemple ci-dessus a les entrées  $t_{11} = 1$ ,  $t_{12} = 2$  et  $t_{21} = 3$ .

On dit que le tableau  $t$  est *semi-standard* si les valeurs sont faiblement croissantes sur chaque ligne en allant de la gauche vers la droite et strictement croissantes sur les colonnes en allant du bas vers le haut, c'est-à-dire  $t$  est semi-standard si

$$t(i, j) \leq t(i + 1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j + 1).$$

Ainsi, on a par exemple le tableau semi-standard :

10			
9	11		
3	4	4	7
2	2	3	5

**Définition 10** Un tableau  $t$  de forme  $\lambda \vdash n$ , est dit un *tableau standard* s'il est *semi-standard* et *injectif*.

Il y a donc forcément croissance stricte dans les lignes. Autrement dit,

$$t(i, j) < t(i + 1, j) \text{ et } t(i, j) < t(i, j + 1).$$

Par exemple, le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

est un tableau standard à 7 éléments, de forme  $(4, 2, 1)$ .

**Définition 11** Un tableau  $t$  de forme  $\lambda \vdash n$ , est dit un *tableau de Young standard* s'il est *standard* à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Ainsi, on peut dire qu'un tableau de Young standard à  $n$  éléments est un diagramme de Ferrers, associé à un certain partage de l'entier  $n$ , étiqueté par les entiers de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de telle sorte que les entrées soient strictement croissantes de gauche à droite et de bas

en haut. Le tableau suivant est un tableau de Young standard de forme  $(5, 3, 1)$

6				
2	5	9		
1	3	4	7	8

Les tableaux

1	2	3	4	4					3					2					4				
				1	2	3			1	2	4			1	3	4			3				
																			1	2			

sont tous les tableaux de Young standards sur  $n = 4$ . Les tableaux

3						4						5						5						4					
2	5					2	5					2	4					3	4					3	5				
1	4					1	3					1	3					1	2					1	2				

sont tous les tableaux de Young standards de forme  $(2, 2, 1)$ .

On dénote l'ensemble de tous les tableaux de Young standards de forme  $\lambda \vdash n$  par  $\text{TYS}^\lambda$ .

Dans toute la suite de cette thèse, on utilisera les tableaux standards ainsi que les tableaux gauches standards. On peut définir les tableaux gauches de Young standards de la même manière que les tableaux de Young standards en remplaçant un diagramme de Ferrers par un diagramme gauche. Plus précisément, pour un diagramme gauche  $\lambda/\mu$ , un tableau gauche  $g$  de forme  $\lambda/\mu$ , avec valeurs dans  $\{1, 2, \dots, k\}$  est une fonction  $g : \lambda/\mu \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Le tableau gauche  $g$  est dit injectif si la fonction sous-jacente est injective. Nous définissons les tableaux gauches semi-standards et standards



de la même manière que les tableaux semi-standards et standards. Un tableau gauche est un tableau gauche de Young standard s'il est standard à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Par exemple,

$$g = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline & 2 & 6 \\ \hline & & 4 \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array}$$

est un tableau gauche de Young standard de forme  $(4, 3, 3, 2)/(3, 2, 1)$ .

On dénote l'ensemble de tous les tableaux gauches de Young standards de forme  $\lambda/\mu$  par  $\text{TGS}^{\lambda/\mu}$ . Dans toute la suite de cette thèse, on dit tableau gauche standard de forme  $\lambda/\mu$  pour un tableau dans  $\text{TGS}^{\lambda/\mu}$ .

Soient  $P$  et  $Q$  deux tableaux gauches standards de forme  $\mu/\nu$  et  $\lambda/\mu$  respectivement. Alors,  $P \cup Q$  dénote le tableau gauche standard de forme  $\lambda/\nu$  tel que

$$(P \cup Q)(c) = \begin{cases} P(c) & \text{si } c \in \mu/\nu \\ Q(c) + m & \text{si } c \in \lambda/\mu \end{cases}$$

où  $m$  est le plus grand élément de  $P$ . Par exemple, pour

$$P = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline & 2 \\ \hline & & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 1 & 6 \\ \hline & 4 & 5 \\ \hline & & 3 \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array},$$

on a

$$P \cup Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 10 & \\ \hline 4 & 9 \\ \hline 1 & 7 & 8 \\ \hline & 2 & 6 \\ \hline & & 3 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Si  $t$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments, alors  $t| [k]$  dénote le tableau de Young standard à  $k$  éléments obtenu de  $t$  par restriction aux cases occupées par les éléments  $1, \dots, k$  et  $t| [k+1, n]$  dénote le tableau gauche standard à  $n - k$  éléments obtenu de  $t$  par restriction aux cases occupées par les éléments  $k+1, \dots, n$ . On peut transformer le tableau gauche  $t| [k+1, n]$  à un tableau gauche de Young standard de même forme en soustrayant  $k$  à chacun de ses éléments. On note ce nouveau tableau par  $st(t| [k+1, n])$  et on dit qu'on a standardisé le tableau gauche standard  $t| [k+1, n]$ . Ainsi

$$t = (t| [k]) \cup (st(t| [k+1, n])).$$

### 1.3 Permutations et sous-groupes de Young

Soit  $\mathbb{P} := \{1, 2, 3, \dots\}$  l'ensemble des entiers strictement positifs. Dans toute la suite de cette thèse, on considère l'ensemble  $\mathbb{P}$  comme un alphabet et on dénote par  $\mathbb{P}^*$  l'ensemble de tous les mots finis sur  $\mathbb{P}$ . On dénote par  $\mathbb{P}^n$  le sous-ensemble de  $\mathbb{P}^*$  constitué de tous les mots de longueur  $n$ . L'ensemble  $\mathbb{P}^*$  est un monoïde. En effet, la concaténation des mots est associative et le mot vide est l'élément neutre pour la concaténation. L'ensemble  $\mathbb{P}^*$  est appelé le monoïde libre sur  $\mathbb{P}$ .

Posons  $[n] := \{1, \dots, n\}$  pour tout  $n \in \mathbb{P}$ . Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  est constitué de toutes les bijections de l'ensemble  $[n]$  vers lui même en utilisant la composition usuelle comme une loi de composition interne. Les éléments  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  sont appelés permutations.

La façon classique de représenter une permutation est la suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au mot

$$\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \cdots \sigma(n) \in \mathbb{P}^n.$$

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est un groupe  $W$  qui a une présentation d'une forme spéciale : nous avons un ensemble de générateurs  $S \subseteq W$  tel que les relations

permettant de définir tous les éléments de  $W$  sont des relations de la forme  $s^2 = 1$  et  $(st)^{m(s,t)} = 1$  où  $s \neq t$  sont des éléments de  $S$  et  $m(s, t) = m(t, s) > 1$  sont des entiers positifs (l'entier  $m(s, t)$  est l'ordre de l'élément  $st$ ). Ainsi, ce groupe est généré par des involutions et les seules relations additionnelles sont celles qui donnent l'ordre d'un produit de deux générateurs quelconques. L'exemple standard est le groupe symétrique  $S_n$  en  $n$  lettres avec générateurs les transpositions élémentaires  $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  où  $s_i = (i \ i+1)$ .

Rappelons aussi que si  $(W, S)$  est un groupe de Coxeter, alors un *sous-groupe parabolique* de  $W$  est un sous-groupe généré par un sous-ensemble de  $S$ . En d'autres mots, pour tout  $J \subseteq S$ , le sous-groupe  $W_J = \langle s \mid s \in J \rangle$  est appelé un sous-groupe parabolique de  $W$  et un tel sous-groupe est particulièrement intéressant car  $(W_J, J)$  est aussi un groupe de Coxeter. Ainsi si  $|S| = n$ , alors  $W$  possède  $2^n$  sous-groupes paraboliques distincts. *Dans le cas particulier du groupe symétrique  $S_n$ , les sous-groupes paraboliques sont précisément les sous-groupes de Young.*

Donc  $(S_n, S)$  est un système de Coxeter où  $S$ , l'ensemble des générateurs, est constitué des  $(n-1)$  transpositions élémentaires  $s_i = (i \ i+1)$  où  $i = 1, \dots, n-1$ . Ainsi la longueur  $\ell(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ , c'est-à-dire la longueur de  $\sigma$  comme un mot en les lettres dans  $S$ , est juste son nombre d'inversions qui est le nombre minimal de transpositions élémentaires, c'est-à-dire d'éléments de  $S$ , nécessaires pour décomposer  $\sigma$  sous la forme d'un produit de telles transpositions.

Notons que les sous-groupes de Young de  $S_n$  sont en bijection avec les compositions de l'entier  $n$ . Rappelons qu'une composition de l'entier  $n$  est une suite  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  d'entiers strictement positifs de somme  $n$  et on écrit  $c \models n$ . Lorsque la suite est décroissante  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0$ , on parle de partage de  $n$ . Donc un partage est une composition particulière.

Cette bijection associe à chaque composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$  un sous-groupe de Young de  $S_n$  qui est isomorphe au groupe  $S_{c_1} \times S_{c_2} \times \dots \times S_{c_k}$ . Réciproquement, chaque

sous-groupe de Young de  $\mathcal{S}_n$  peut être étiqueté par une unique composition de  $n$ . Pour plus de détails, voir (Geck et Pfeiffer, 2000).

Ainsi, on peut donner la définition suivante :

**Définition 12** Soit  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k) \models n$ , alors le sous-groupe de Young de  $\mathcal{S}_n$  correspondant est

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_{\{1,2,\dots,c_1\}} \times \mathcal{S}_{\{c_1+1,c_1+2,\dots,c_1+c_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-c_k+1,n-c_k+2,\dots,n\}}.$$

En général  $\mathcal{S}_{(c_1,c_2,\dots,c_k)}$  et  $\mathcal{S}_{c_1} \times \mathcal{S}_{c_2} \times \dots \times \mathcal{S}_{c_k}$  sont isomorphes comme groupes. Si nous imaginons que les  $n$  lettres  $1, 2, \dots, n$  sont des objets distincts placés dans  $k$  cellules où la  $i$ -ème cellule contient  $c_i$  objets pour tout  $i = 1, \dots, k$ , alors le sous-groupe  $\mathcal{S}_{(c_1,c_2,\dots,c_k)}$  du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  est le groupe constitué de chaque permutation qui n'envoie aucun objet hors de sa cellule, c'est-à-dire une telle permutation permute les objets de chaque cellule entre eux sans les permuter avec les objets d'une autre cellule. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(3,3,2,1)} &= \mathcal{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{4,5,6\}} \times \mathcal{S}_{\{7,8\}} \times \mathcal{S}_{\{9\}} \\ &\cong \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_1. \end{aligned}$$

Notons que ces sous-groupes sont nommés en l'honneur de Alfred Young, le premier qui a construit des représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_n$ .

**Définition 13** À toute composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$ , on associe une permutation

$$\gamma_c = \gamma_c(1) \gamma_c(2) \dots \gamma_c(n),$$

définie comme le produit de juxtaposition

$$\gamma_c = w_1 w_2 \dots w_k,$$

avec

$$w_1 = u_1 (u_1 - 1) \dots 21,$$

et pour tout  $2 \leq j \leq k$ ,

$$w_j = u_j (u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2) (u_{j-1} + 1),$$

où pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,

$$u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j.$$

Notons que pour tout  $1 \leq j \leq k$ , la longueur du mot  $w_j$  est  $c_j$ . Ainsi, la permutation  $\gamma_c$ , vue comme un mot en les lettres  $1, \dots, n$ , est de longueur  $n$ . Notons aussi que la permutation  $\gamma_c$  est la permutation la plus longue, c'est-à-dire ayant le plus grand nombre d'inversions, dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_{c_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{c_k}$  du groupe  $\mathcal{S}_n$ .

Par exemple, soit  $c = (c_1, c_2, c_3) = (3, 2, 2)$  une composition de l'entier 7. Ainsi

$$u_1 = c_1 = 3,$$

$$u_2 = c_1 + c_2 = 3 + 2 = 5,$$

$$u_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 3 + 2 + 2 = 7.$$

On a

$$w_1 = u_1(u_1 - 1) \dots 21 = 321,$$

$$w_2 = u_2(u_2 - 1) \dots (u_1 + 2)(u_1 + 1) = 5 \dots (3 + 1) = 54,$$

$$w_3 = u_3(u_3 - 1) \dots (u_2 + 2)(u_2 + 1) = 7 \dots (5 + 1) = 76.$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma_c &= w_1 w_2 w_3 \\ &= 321 \cdot 54 \cdot 76 \\ &= 3215476. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

La permutation  $\gamma_c$ , vue comme l'application  $i \mapsto \gamma_c(i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est une involution.

De plus,

$$\gamma_c(i) = c_1 - i + 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq c_1,$$

et si  $1 \leq i \leq c_j$ , pour un certain  $2 \leq j \leq k$ , alors

$$\gamma_c(c_1 + \dots + c_{j-1} + i) = c_1 + \dots + c_{j-1} + c_j - i + 1.$$

On dénote l'unique permutation de  $\mathcal{S}_n$  de longueur maximale par  $\omega_{0,n}$ , ainsi

$$\omega_{0,n} = n(n-1) \cdots 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Algorithme de Schensted

La correspondance entre permutations et paires de tableaux de Young standards de même forme a été introduite en 1961 par C. Schensted (Schensted, 1961). Cette correspondance est maintenant connue sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. En effet, on attribue la paternité de cette correspondance à G. de B. Robinson bien qu'originellement il l'ait introduit sous une autre forme dans la théorie des représentations du groupe symétrique (Robinson, 1938). Dans (Knuth, 1970), une généralisation est donnée pour les matrices à deux lignes. Une interprétation géométrique est présentée dans (Viennot, 1977). Cette correspondance a été étudiée en elle-même par divers auteurs, comme M.-P. Schützenberger, qui lui ont découvert une série de propriétés combinatoires curieuses ou utiles pour l'étude des fonctions symétriques.

Plus précisément, Schensted a introduit un algorithme permettant d'associer de manière bijective à toute permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme sur  $n$  éléments. Cette bijection donne une preuve constructive de l'identité

$$n! = \sum_{\lambda} (f_{\lambda})^2,$$

où la somme du second membre est étendue à tous les partages  $\lambda$  de l'entier  $n$  et où  $f_{\lambda}$  désigne le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . Il est bien connu que  $f_{\lambda}$  est donné par la formule suivante appelée la formule des équerres ((Sagan, 2001), page 124) :

$$f_{\lambda} = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} h_c},$$

où, pour  $c$  une case de  $\lambda$ ,  $h_c$  est la longueur d'équerre de la case  $c = (i-1, j-1)$ , à savoir  $h_c = (\lambda_j - i) + (\lambda'_i - j) + 1$ .

Pour

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

on a les valeurs d'équerres

2	1	
4	3	1

et il y a donc  $5 = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2}$  tableaux de Young standards de forme  $\lambda = (3, 2)$  qui sont :

4	5		3	5		3	4		2	5		2	4	
1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5

Notons que le nombre  $f_\lambda$  est égal au degré de la représentation irréductible du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  associée à  $\lambda$ .

L'algorithme de Schensted associe à toute permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  de manière explicite une paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards à  $n$  éléments. Dans cette section, nous nous proposons de donner un exposé systématique de cet algorithme.

Soit  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$  un partage de l'entier  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ . Rappelons qu'un tableau standard à  $n$  éléments, de forme  $\lambda$ , est un tableau indexé

$$P = \{P_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

tel que :

- (i) les éléments  $P_{ij}$  sont des entiers, strictement positifs distincts.
- (ii) chaque ligne (de gauche à droite) et chaque colonne (de bas en haut) forme une suite strictement croissante.

Lorsque les éléments  $P_{ij}$  sont exactement les entiers  $1, 2, \dots, n$ , alors le tableau  $P$  est un tableau de Young standard de forme  $\lambda$ .

### 1.4.1 Algorithme d'insertion

Il existe plusieurs versions de l'algorithme de Schensted qui décrit le passage d'une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$  à un couple  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards à  $n$  éléments de même forme. Cet algorithme se réalise par une suite d'insertions ; nous donnons la version utilisant l'insertion ligne.

Supposons qu'on veut insérer l'élément 8 dans le tableau  $P$  où

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 17 & & & & & \\ \hline 11 & & & & & \\ \hline 4 & 13 & 14 & & & \\ \hline 2 & 6 & 10 & 15 & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 9 & 12 & 16 \\ \hline \end{array}$$

L'élément 8 remplace l'élément 9 dans la première ligne, car 9 est le plus petit élément dans cette ligne supérieur à 8. L'élément 9 est éjecté en haut à la deuxième ligne où il remplace l'élément 10. L'élément 10 remplace l'élément 13 qui sera éjecté de la troisième ligne à la quatrième ligne ; et puisque la quatrième ligne ne contient aucun élément supérieur à 13, le processus termine, en ajoutant 13 dans une nouvelle case à la fin de cette ligne. alors le tableau  $P$  est transformé au tableau  $P'$  où

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 17 & & & & & \\ \hline 11 & 13 & & & & \\ \hline 4 & 10 & 14 & & & \\ \hline 2 & 6 & 9 & 15 & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 8 & 12 & 16 \\ \hline \end{array}$$

Une description précise de ce processus, apparaît dans l'algorithme suivant :

#### Algorithme d'insertion

Soit  $P = \{P_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ , un tableau standard à  $n$  éléments et  $x$  un entier distinct des entiers  $P_{ij}$ . L'algorithme d'insertion de  $x$  dans  $P$  définit un nouveau tableau qu'on note  $P \leftarrow x$  à  $(n+1)$  éléments de la manière suivante :



(i) Si  $P$  est vide, alors  $P \leftarrow x$  est le tableau à un seul élément égal à  $x$ .

(ii) Pour  $P$  non vide,  $P \leftarrow x$  est défini de manière récursive de la façon suivante :

- si  $x$  est plus grand que tous les éléments de la première ligne de  $P$ , on ajoute  $x$  à la fin de cette ligne,

- sinon, soit  $y$  le plus petit des éléments de la première ligne supérieurs à  $x$ . On remplace  $y$  par  $x$  et on insère  $y$  selon les règles (i) et (ii) dans le tableau obtenu à partir de  $P$  en supprimant la première ligne.

Autrement dit, l'insertion d'un élément  $x$  se fait récursivement sur les lignes en remplaçant l'entier  $y$  le plus petit supérieur à  $x$  (sur la ligne courante) par  $x$  et en insérant l'entier  $y$  sur la ligne suivante. Le processus débute par insertion sur la première ligne et s'arrête lorsque l'entier inséré ne prend la place d'aucun autre (création d'une nouvelle ligne supérieure ou insertion en fin d'une ligne). Par exemple, si  $P$  est le tableau standard

11			
4	8		
2	5	7	9

et si  $x = 6$ , alors

$P \leftarrow 6 =$				11			
				8			
				4	7		
				2	5	6	9

L'algorithme d'insertion transforme le tableau standard  $P$  en un autre tableau standard qui contient  $x$  ainsi que tous les éléments de  $P$ . Ce nouveau tableau  $P' = P \leftarrow x$  a la même forme que  $P$  à l'exception de l'addition d'une nouvelle case  $(s, t)$ , occupée par l'entier  $P'_{st}$  où  $s$  et  $t$  sont des quantités déterminées par cet algorithme.

### 1.4.2 Algorithme de suppression

L'algorithme d'insertion de l'élément 8 dans le tableau  $P$ , donné ci-dessus, a transformé le tableau  $P$  au tableau  $P'$ . Il existe un autre algorithme qui va transformer le tableau  $P'$  en le tableau  $P$ , cet algorithme est d'une certaine manière l'algorithme inverse de l'algorithme d'insertion. En effet, en se donnant les valeurs de  $s$  et  $t$  déterminées par l'algorithme d'insertion, on peut transformer le tableau  $P'$  en  $P$  en supprimant l'élément  $x$  qui a été inséré.

D'après l'algorithme d'insertion de l'élément 8 dans le tableau  $P$ , donné ci-dessus, il est clair que  $s = 4$ ,  $t = 2$  et  $P'_{42} = 13$ . Ainsi, l'élément 13 est éjecté en bas, à la troisième ligne où il remplace 10, car 10 est le plus grand élément inférieur à 13 dans cette ligne. D'une manière similaire, 10 est éjecté en bas et remplace 9 qui sera éjecté en bas et remplace l'élément 8. Ainsi le tableau  $P'$  est transformé au tableau  $P$ .

L'algorithme suivant spécifie ce processus en détails.

#### Algorithme de suppression

*Soit  $P = \{P_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ , un tableau de Young standard à  $n$  éléments de forme  $\lambda$ . Soient  $s$  et  $t$  des entiers strictement positifs tels que la case  $(s, t)$  n'est pas vide et les cases  $(s + 1, t)$  et  $(s, t + 1)$  sont vides, c'est-à-dire la case  $(s, t)$  est un coin intérieur de  $\lambda$ .*

*L'algorithme de suppression définit un nouveau tableau à  $(n - 1)$  éléments de la manière suivante :*

- *si  $s = 1$ , alors le nouveau tableau est obtenu du tableau  $P$  en supprimant l'élément  $P_{1t}$  qui se trouve à la fin de la première ligne.*
- *sinon, soit  $y_1$  le plus grand des éléments de la ligne  $(s - 1)$  inférieur à  $P_{st}$  (un tel élément  $y_1$  existe toujours car l'élément dans la ligne  $(s - 1)$  qui est situé directement au-dessous de  $P_{st}$ , dans la même colonne, est inférieur à  $P_{st}$ ). On retire l'élément  $P_{st}$*

de la ligne  $s$  de  $P$  et on remplace  $y_1$  par  $P_{st}$  et on supprime  $y_1$  sur la ligne  $(s-1)$ . Si  $(s-1) = 1$ , alors le nouveau tableau est obtenu en supprimant  $y_1$ . Sinon, soit  $y_2$  le plus grand des éléments de la ligne  $(s-2)$  inférieur à  $y_1$ , on remplace  $y_2$  par  $y_1$  et on supprime  $y_2$  sur la ligne  $(s-2)$ .

On continue ce processus qui va s'arrêter lorsque un entier  $y_j$ , pour un certain  $j \geq 1$ , est éjecté du tableau  $P$ .

### 1.4.3 Algorithme de Schensted

L'algorithme de Schensted est l'algorithme qui décrit le passage d'une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$  à un couple  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards à  $n$  éléments de même forme. Cet algorithme est donné par la définition suivante :

**Définition 14** Soit  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  une permutation. On lui fait correspondre deux suites

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ et } (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$$

de tableaux de Young standards, définis par les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i)  $P_0$  est le tableau vide et  $P_k = P_{k-1} \leftarrow x_k$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

(ii)  $Q_0$  est le tableau vide et pour chaque  $k = 1, 2, \dots, n$ , notons  $(i_k, j_k)$  la nouvelle case qu'on a ajouté à  $P_{k-1}$  en lui insérant l'élément  $x_k$ . Le tableau  $Q_k$  est alors obtenu en ajoutant à  $Q_{k-1}$  la même case  $(i_k, j_k)$  et en posant  $Q_k(i_k, j_k) = k$ .

Posons  $P_n = P(\sigma)$  et  $Q_n = Q(\sigma)$ . La paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  est alors la paire, de tableaux de Young standards, associée à  $\sigma$  par l'algorithme de Schensted.

Autrement dit, prenons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

On insère l'image de cette permutation de gauche à droite dans un tableau  $P$  au départ vide, et on construit parallèlement un tableau  $Q$  indiquant l'ordre d'apparition des

cellules du tableau  $P$ . Les tableaux obtenus sont notés respectivement  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$ . Schensted a appelé  $P(\sigma)$  le  $P$ -symbole de  $\sigma$  et  $Q(\sigma)$  le  $Q$ -symbole de  $\sigma$ .

Par exemple, soit  $\sigma = 3641725$  une permutation de l'ensemble  $[7]$ . L'algorithme décrit par (i) et (ii) donne les paires  $(P_k, Q_k)$  suivantes :

$k$	$P_k$	$Q_k$														
0	$\emptyset$	$\emptyset$														
1	<table><tr><td>3</td></tr></table>	3	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1												
3																
1																
2	<table><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	6	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2										
3	6															
1	2															
3	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	3	4	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2								
6																
3	4															
3																
1	2															
4	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	6	3	1	4	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	3	1	2						
6																
3																
1	4															
4																
3																
1	2															
5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr></table>	6	3	1	4	7	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	1	2	5				
6																
3																
1	4	7														
4																
3																
1	2	5														
6	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr></table>	6	3	4	1	2	7	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	6	1	2	5		
6																
3	4															
1	2	7														
4																
3	6															
1	2	5														
7	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	6	3	4	7	1	2	5	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	6	7	1	2	5
6																
3	4	7														
1	2	5														
4																
3	6	7														
1	2	5														

et on écrit

$$3641725 \xrightarrow{\pi} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \right).$$

De même, la correspondance inverse de Schensted, c'est-à-dire le passage d'un couple  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme à une permutation  $\sigma$  peut être définie comme suit :

**Définition 15** Soit  $(P, Q)$  une paire de tableaux de Young standards de même forme à  $n$  éléments, on lui fait correspondre une permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  définie comme suit :

On épluche  $P$  en partant de la plus grande cellule de  $Q$  jusqu'à sa plus petite. On retire donc récursivement un  $i$  d'une ligne de  $P$ , en remplaçant le plus grand entier  $j$  inférieur à  $i$  par  $i$  et on supprime  $j$  sur la ligne inférieure. Le processus s'arrête lorsqu'un entier est éjecté du tableau. La suite des entiers éjectés forme la permutation  $\sigma$ . Cette suite des éléments éjectés est exactement la suite  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ . Plus précisément, on construit une suite  $(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0)$  de tableaux de Young standards définie par les conditions :

$P_n = P$  et  $P_{k-1}$  est obtenu à partir de  $P_k$  par l'algorithme de suppression en prenons pour  $s$  et  $t$  les entiers qui vérifient  $Q_{st} = k$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ . Un élément  $x_k$  déterminé par cet algorithme est supprimé de  $P_k$ .

Par exemple, soit

$$(P, Q) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 9 & & \\ \hline 3 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 9 & & \\ \hline 2 & 7 & 8 & \\ \hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right).$$

L'algorithme décrit ci-dessus donne

$k$	$P_k$	$s$	$t$	$x_k$									
9	<table><tr><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	7	9	3	4	6	1	2	5	8	3	2	5
7	9												
3	4	6											
1	2	5	8										
8	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	7	3	4	9	1	2	6	8	2	3	8	
7													
3	4	9											
1	2	6	8										

$k$	$P_k$	$s$	$t$	$x_k$							
7	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	4	1	2	6	9	2	2	2
7											
3	4										
1	2	6	9								
6	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	1	4	6	9	1	4	9	
7											
3											
1	4	6	9								
5	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	7	3	1	4	6	1	3	6		
7											
3											
1	4	6									
4	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	7	3	1	4	1	2	4			
7											
3											
1	4										
3	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	7	3	1	3	1	1				
7											
3											
1											
2	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	7	3	2	1	3					
7											
3											
1	<table><tr><td>7</td></tr></table>	7	1	1	7						
7											

Donc  $\sigma = 731469285$ .

**Remarque 1** Les insertions peuvent se faire non pas en ligne, mais en colonne et l'on a donc en fait deux correspondances de Schensted. De façon analogue, Schensted note  $x \longrightarrow P$  le tableau obtenu par insertion colonne de l'élément  $x$  dans le tableau  $P$ . On peut remarquer que

$$x \longrightarrow P = (P^T \longleftarrow x)^T,$$

où  $^T$  indique la transposition. Remarquons aussi que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des entiers positifs distincts, alors pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$(x_1 \longrightarrow \dots (x_{k-2} \longrightarrow (x_{k-1} \longrightarrow x_k)) \dots) = (\dots ((x_k \longleftarrow x_{k-1}) \longleftarrow x_{k-2}) \dots \longleftarrow x_1)^T,$$

où il est logique de considérer ici  $x_k$  comme le tableau à une seule entrée égale à  $x_k$ .

**Remarque 2** La correspondance de Schensted peut être donnée non pas pour une permutation, mais pour une bijection entre deux sous-ensembles de  $\mathbb{P}$ . En effet, soit  $\sigma : A \longrightarrow B$ , une bijection d'un sous-ensemble  $A \subseteq \mathbb{P}$  sur un autre sous-ensemble  $B \subseteq \mathbb{P}$  (remarquons que si  $A = B = [n]$ , alors  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$ ). On peut construire deux tableaux standards  $P$  et  $Q$  de même forme qui correspondent à la bijection  $\sigma$  où l'ensemble des éléments de  $P$  est  $B$  et l'ensemble des éléments de  $Q$  est  $A$ . Cette correspondance est notée par

$$(\sigma : A \longrightarrow B) \mapsto (P(\sigma, B), Q(\sigma, A)).$$

Par exemple si  $\sigma : \{1, 3, 5, 6, 8\} \longrightarrow \{2, 3, 5, 7, 9\}$  est la bijection donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

on obtient

	$P$	$Q$								
<i>Insérer 7</i>	<table><tr><td>7</td></tr></table>	7	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1						
7										
1										
<i>Insérer 2</i>	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	7	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	3	1				
7										
2										
3										
1										
<i>Insérer 9</i>	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>9</td></tr></table>	7	2	9	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	3	1	5		
7										
2	9									
3										
1	5									
<i>Insérer 5</i>	<table><tr><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	7	9	2	5	<table><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	3	6	1	5
7	9									
2	5									
3	6									
1	5									

	$P$	$Q$												
	<table><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	7		5	9	2	3	<table><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	8		3	6	1	5
7														
5	9													
2	3													
8														
3	6													
1	5													
<i>Insérer 3</i>		.												

Alors, les tableaux  $(P, Q)$  qui correspondent à la bijection  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  sont

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{et } Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Maintenant, on peut dire que :

Le  $P$ -symbole qui correspond à une permutation  $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$  ou plus généralement à une suite d'entiers distincts  $x_1 x_2 \dots x_n$  est le tableau standard

$$(\dots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \dots \leftarrow x_n)$$

où il est logique de considérer ici  $x_1$  comme le tableau à une seule entrée égale à  $x_1$ .

Le  $Q$ -symbole qui correspond à cette suite  $x_1 x_2 \dots x_n$  est le tableau qui a la même forme que le  $P$ -symbole et qui est obtenu en posant  $k$  dans la case qui correspond à la case ajoutée au  $P$ -symbole quand  $x_k$  est inséré dans celui-ci.

Dans toute la suite de cette thèse, on note la correspondance de Schensted par  $\pi$ . Ainsi  $\pi$  est la bijection

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{S}_n &\longrightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{TYS}^\lambda \times \text{TYS}^\lambda, \\ \sigma &\longmapsto (P(\sigma), Q(\sigma)). \end{aligned}$$

Cette bijection est maintenant devenue classique sous le nom de correspondance de Robinson-Schensted. Elle fut l'objet d'une étude approfondie et diverses propriétés combinatoires spectaculaires ont été mises en évidence depuis. Deux des propriétés les plus étonnantes sont certainement celles, découvertes par Schützenberger, concernant la caractérisation des multiples liens entre les paires de tableaux associés à une permutation,



l'inverse et l'image miroir de cette permutation. Pour la permutation  $\sigma^{-1}$  (l'inverse de  $\sigma$ ) et la permutation  $\sigma^*$  (l'image miroir de  $\sigma$ ), la correspondance associe respectivement les couples de tableaux  $(Q(\sigma), P(\sigma))$  et  $(P^T(\sigma), ev(Q^T(\sigma)))$  où  $P^T(\sigma)$  est le tableau  $P(\sigma)$  transposé et  $ev(Q^T(\sigma))$  est obtenu de  $Q(\sigma)$  par transposition et en appliquant l'algorithme connu sous le nom de "vidage-remplissage" ou évacuation, également dû à Schützenberger. Autrement dit

$$(P(\sigma^{-1}), Q(\sigma^{-1})) = (Q(\sigma), P(\sigma))$$

et

$$(P(\sigma^*), Q(\sigma^*)) = (P^T(\sigma), ev(Q^T(\sigma))).$$

## 1.5 Relations de Knuth

Sur l'ensemble  $S_n$ , on peut définir la relation d'équivalence suivante :

**Définition 16** Deux permutations  $\pi, \sigma \in S_n$  sont dites  $P$ -équivalentes et on écrit  $\pi \stackrel{P}{\cong} \sigma$  si  $P(\pi) = P(\sigma)$ .

On peut décrire cette relation d'équivalence d'une autre manière en utilisant les relations de Knuth.

**Définition 17** Supposons  $x < y < z$ . Alors  $\pi, \sigma \in S_n$  diffèrent par une relation de Knuth du premier genre si

$$\pi = x_1 \dots yxz \dots x_n \text{ et } \sigma = x_1 \dots yzx \dots x_n$$

ou

$$\pi = x_1 \dots yzx \dots x_n \text{ et } \sigma = x_1 \dots yxz \dots x_n$$

et on écrit  $\pi \stackrel{1}{\cong} \sigma$ . Les permutations  $\pi, \sigma \in S_n$  diffèrent par une relation de Knuth du second genre si

$$\pi = x_1 \dots xzy \dots x_n \text{ et } \sigma = x_1 \dots zxy \dots x_n$$

ou

$$\pi = x_1 \dots zxy \dots x_n \text{ et } \sigma = x_1 \dots xzy \dots x_n$$

et on écrit  $\pi \stackrel{2}{\cong} \sigma$ . Deux permutations sont Knuth équivalentes et on écrit  $\pi \stackrel{K}{\cong} \sigma$  s'il existe une suite de permutations  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}, \pi_k$  telle que  $\pi_1 = \pi$  et  $\pi_k = \sigma$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , les permutations  $\pi_i$  et  $\pi_{i-1}$  diffèrent par une relation de Knuth du premier genre ou du second genre. Ainsi,

$$\pi = \pi_1 \stackrel{i}{\cong} \pi_2 \stackrel{j}{\cong} \dots \stackrel{l}{\cong} \pi_k = \sigma$$

où  $i, j, \dots, l \in \{1, 2\}$ .

Les classes des deux relations d'équivalence  $\ll \dots \stackrel{P}{\cong} \dots \gg$  et  $\ll \dots \stackrel{K}{\cong} \dots \gg$  coïncident. Notons que chacune de ces deux relations d'équivalence est appelée la congruence plaxique et que les classes d'équivalence sont appelées les classes plaxiques.

**Théorème 1** (Knuth, 1970) Si  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors

$$\pi \stackrel{P}{\cong} \sigma \Leftrightarrow \pi \stackrel{K}{\cong} \sigma.$$

Si  $T$  est un tableau de Young standard, alors on note par  $\text{read}(T)$  la permutation obtenue, comme mot en les lettres  $1, \dots, n$ , en lisant dans l'ordre croissant la dernière ligne de  $T$  ensuite l'avant dernière jusqu'à la première ligne. De même, on note par  $\text{row}(T)$  la permutation obtenue, comme mot en les lettres  $1, \dots, n$ , en lisant dans l'ordre croissant la première ligne de  $T$  ensuite la deuxième jusqu'à la dernière ligne. Par exemple, si

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & & \\ \hline 5 & 8 & & \\ \hline 2 & 7 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 9 \\ \hline \end{array},$$

alors  $\text{read}(T) = 658271349 \in \mathcal{S}_9$  et  $\text{row}(T) = 134927586 \in \mathcal{S}_9$ .

Ainsi, on peut donner la définition suivante :

**Définition 18** On dira que deux tableaux de Young standards  $T$  et  $S$  diffèrent par une relation de Knuth et on écrit  $T \stackrel{K}{\cong} S$ , si  $\text{read}(T) \stackrel{K}{\cong} \text{read}(S)$ .

Le théorème suivant donne le  $P$ -symbole de la permutation  $\text{read}(T)$  où  $T$  est un tableau de Young standard ((Sagan, 2001), lemme 3.4.5).

**Théorème 2** Si  $T$  est un tableau de Young standard, alors

$$P(\text{read}(T)) = T.$$

Sur l'ensemble  $\mathcal{S}_n$ , on peut définir aussi la relation d'équivalence suivante :

**Définition 19** Deux permutations  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$  sont dites  $Q$ -équivalentes et on écrit  $\pi \stackrel{Q}{\cong} \sigma$  si  $Q(\pi) = Q(\sigma)$ .

On peut décrire cette relation d'équivalence d'une autre manière en utilisant les relations de Knuth duales.

**Définition 20** Les permutations  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$  diffèrent par une relation de Knuth duale du premier genre si

$$\pi = \dots k + 1 \dots k \dots k + 2 \dots \text{ et } \sigma = \dots k + 2 \dots k \dots k + 1 \dots$$

ou

$$\pi = \dots k + 2 \dots k \dots k + 1 \dots \text{ et } \sigma = \dots k + 1 \dots k \dots k + 2 \dots$$

et on écrit  $\pi \stackrel{1^*}{\cong} \sigma$ . Les permutations  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$  diffèrent par une relation de Knuth duale du second genre si

$$\pi = \dots k \dots k + 2 \dots k + 1 \dots \text{ et } \sigma = \dots k + 1 \dots k + 2 \dots k \dots$$

ou

$$\pi = \dots k + 1 \dots k + 2 \dots k \dots \text{ et } \sigma = \dots k \dots k + 2 \dots k + 1 \dots$$

et on écrit  $\pi \stackrel{2^*}{\cong} \sigma$ . Deux permutations sont Knuth duale équivalentes et on écrit  $\pi \stackrel{K^*}{\cong} \sigma$  s'il existe une suite de permutations  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}, \pi_k$  telle que  $\pi_1 = \pi$  et  $\pi_k = \sigma$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , les permutations  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$  diffèrent par une relation de Knuth duale du premier genre ou du second genre. Ainsi,

$$\pi = \pi_1 \stackrel{i^*}{\cong} \pi_2 \stackrel{j^*}{\cong} \dots \stackrel{l^*}{\cong} \pi_k = \sigma$$

où  $i, j, \dots, l \in \{1, 2\}$ .

Les classes des deux relations d'équivalence  $\ll \dots \stackrel{Q}{\cong} \dots \gg$  et  $\ll \dots \stackrel{K^*}{\cong} \dots \gg$  coïncident. Notons que chacune de ces deux relations d'équivalence est appelée la congruence coplaxique et que les classes d'équivalence sont appelées les classes coplaxiques.

**Théorème 3** (Knuth) Si  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors

$$\pi \stackrel{Q}{\cong} \sigma \Leftrightarrow \pi \stackrel{K^*}{\cong} \sigma.$$

De même, on peut donner la définition suivante :

**Définition 21** On dira que deux tableaux de Young standards  $T$  et  $S$  diffèrent par une relation de Knuth duale et on écrit  $T \stackrel{K^*}{\cong} S$ , si  $\text{read}(T) \stackrel{K^*}{\cong} \text{read}(S)$ .

**Proposition 1** Soient  $P$  et  $Q$  deux tableaux de Young standards ayant la même forme  $\lambda \vdash n$ . Alors,  $P \stackrel{K^*}{\cong} Q$ .

**Remarque 3** Toutes les définitions données dans cette section pour les tableaux de Young standards restent aussi vraies pour les tableaux gauches standards. En particulier, à chaque tableau gauche standard  $g$  on peut associer la permutation  $\text{read}(g)$ .

## 1.6 Construction géométrique de Viennot

Dans cette section, nous présenterons une version géométrique de la correspondance de Schensted introduite par Viennot (Viennot, 1977). Cette version géométrique fournit

un cadre naturel à toutes les propriétés classiques de cette correspondance. Nous y suivrons l'article de Viennot (Viennot, 1977) et le livre de Bruce E. Sagan (Sagan, 2001).

### 1.6.1 Squelette d'une permutation

À toute permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$ , on associe l'ensemble  $\hat{\sigma}$  des points du plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  qui est le graphe de  $\sigma$

$$\hat{\sigma} = \{(i, \sigma(i)) \in [n] \times [n] \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Par exemple, si  $\sigma$  est la permutation de  $\mathcal{S}_7$  définie par  $\sigma = 3641725$ , alors

$$\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}.$$

Cet ensemble  $\hat{\sigma}$  est représenté par la figure 1.1 ci-dessous.

Plus généralement, nous donnons la définition suivante :

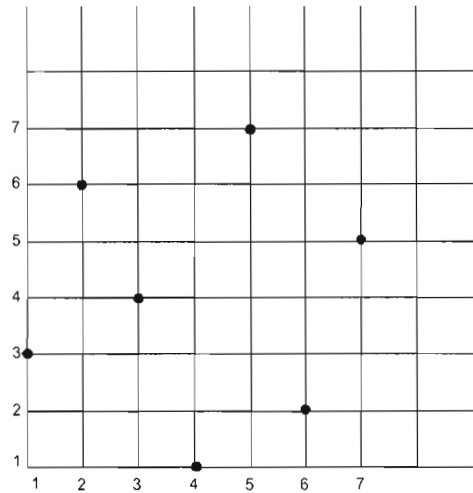


Figure 1.1  $\hat{\sigma} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (5, 7), (6, 2), (7, 5)\}$ .

**Définition 22** Nous appelons *quasi-permutation* toute partie finie  $\tau$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ayant au plus un point par ligne et par colonne, c'est-à-dire vérifiant la condition :

$$(x, y) \neq (x', y') \Rightarrow x \neq x' \text{ et } y \neq y', \text{ pour tous } (x, y), (x', y') \in \tau.$$

Soient  $pr_x$  et  $pr_y$  les deux projections de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  associant à  $(x, y)$  respectivement son abscisse  $x$  et son ordonnée  $y$ . Le support d'une quasi-permutation  $\tau$  est défini comme suit :

**Définition 23** Soit  $\tau$  une quasi-permutation. Le support de  $\tau$ , qu'on note  $Supp(\tau)$ , est défini par

$$Supp(\tau) = pr_x(\tau) \times pr_y(\tau),$$

où  $\times$  désigne le produit cartésien.

Par exemple, si  $\tau$  est la quasi-permutation définie par  $\tau = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5)\}$ , alors

$$Supp(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\}.$$

Toute quasi-permutation peut être identifiée à une permutation relativement à son support. Plus précisément, lorsque  $Supp(\tau) \subseteq [n] \times [n]$ , c'est-à-dire lorsque  $\tau$  est une partie d'un certain ensemble  $\hat{\sigma}$  associé à une permutation  $\sigma$  de  $S_n$ , nous dirons que  $\tau$  est une *quasi-permutation de  $[n]$* . Nous pourrions alors identifier  $\tau$  au mot  $\tau(1)\tau(2)\dots\tau(n)$ , de longueur  $n$ , en les lettres  $0, 1, 2, \dots, n$ , défini par

$$\tau(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \text{ n'a aucun point d'abscisse } i, \\ y & \text{si } (i, y) \in \tau. \end{cases}$$

Pour la quasi-permutation  $\tau = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5)\}$ , on a

$$Supp(\tau) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 5\} \subseteq [5] \times [5],$$

ainsi  $\tau$  est une quasi-permutation de  $[5]$ , qu'on peut identifier au mot 21050. On peut aussi remarquer que  $Supp(\tau) \subseteq [6] \times [6]$  et ainsi  $\tau$  est une quasi-permutation de  $[6]$ , qu'on peut identifier au mot 210500.

En imaginant que le plan est éclairé par le coin inférieur gauche, on définit certaines zones d'ombre de points du plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Définition 24** L'ombre  $O(m)$  d'un point  $m = (x, y)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est l'ensemble des points  $m' \geq m$  pour l'ordre naturel.

La figure 1.2 ci-dessus montre l'ombre  $O((4, 5))$ .

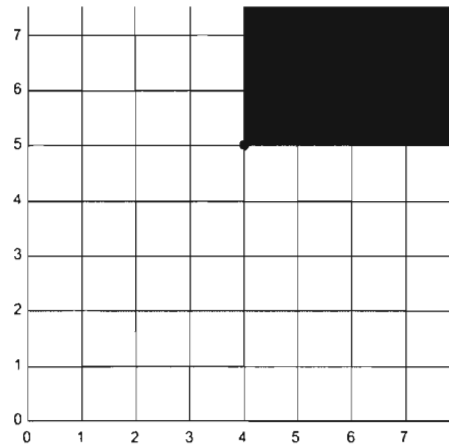


Figure 1.2 L'ombre  $O((4, 5))$ .

**Définition 25** Soit  $P$  une partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Nous appellerons ombre de  $P$  la réunion  $O(P)$  des ombres de ses points, c'est-à-dire

$$O(P) = \bigcup_{m \in P} O(m).$$

Maintenant, parmi les points de  $P$ , on peut distinguer certains points particuliers.

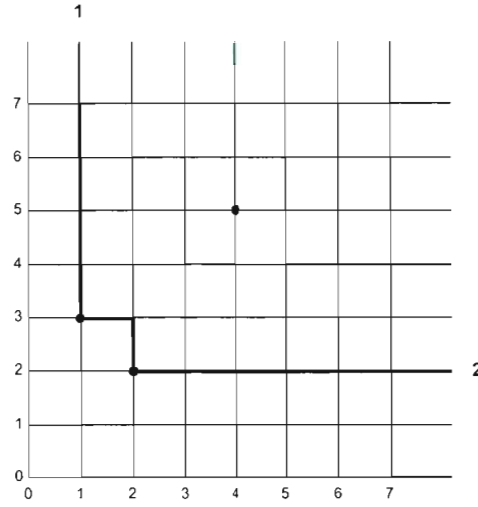
**Définition 26** Nous appellerons un point saillant de  $P$  un point qui n'est dans l'ombre d'aucun autre point de  $P$ . Nous notons  $S(P)$  l'ensemble des points saillants de  $P$ .

Par exemple, si  $P = \hat{\sigma}$  où  $\sigma = 3641725$  une permutation de  $S_7$ , alors

$$S(\hat{\sigma}) = \{(1, 3), (4, 1)\}.$$

**Définition 27** Soit  $P$  une partie finie non vide de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Une ligne saillante  $L = L(P)$  correspondante à  $P$  est définie comme la frontière du fermé  $O(P)$ .

Si  $P$  est une quasi-permutation, alors la ligne saillante de  $P$  est une ligne brisée  $L$  constituée de segments et exactement d'une seule demi-droite horizontale et d'une

Figure 1.3 La ligne saillante  $L$  de  $P$ 

seule demi-droite verticale. Nous appelons  $x$ -coordonnée de  $L$  l'abscisse d'un point de sa demi-droite verticale et on la note  $x_L$  et nous appelons  $y$ -coordonnée de  $L$  l'ordonnée d'un point de sa demi-droite horizontale et on la note  $y_L$ . Par exemple, si  $P = \{(1,3), (2,2), (4,5)\}$ , alors la ligne saillante  $L$  de  $P$  est la frontière du fermé  $O((1,3)) \cup O((2,2))$  car  $(1,3)$  et  $(2,2)$  sont tous les points saillants de  $P$ . Dans la figure 1.3 ci-dessous cette ligne appropriée est en gras. Sa  $x$ -coordonnée est 1 et sa  $y$ -coordonnée est 2 ; elles sont illustrées en haut et à droite de son diagramme respectivement.

Posons

$$\tau = S(P) = S(L).$$

Notons que  $\tau$  est une chaîne  $\{m_1 \leq_C m_2 \leq_C \dots \leq_C m_p\}$  pour l'ordre croisé et que l'on a  $O(\tau) = O(P)$ . Pour  $i = 1, 2, \dots, p$ , soit  $L(m_i)$  la ligne saillante du point  $m_i = (x_i, y_i)$ . Ainsi, pour  $i = 1, 2, \dots, p-1$ , les lignes saillantes  $L(m_i)$  et  $L(m_{i+1})$  de  $m_i = (x_i, y_i)$  et  $m_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  ont une intersection réduite à un seul point, à savoir  $(x_{i+1}, y_i)$ . On note  $S_d^+(L)$  l'ensemble des éléments  $L(m_i) \cap L(m_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots, p-1$ ). On les appellera dans la suite points saillants supérieurs droits de  $L$ .

Sur la figure 1.4 ci-dessous, les points  $S(L) = \tau$  de la ligne saillante  $L$  sont les quatre





**Lemme 1** Soit  $\tau$  une quasi-permutation de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Alors il existe un et un seul ensemble de lignes saillantes  $\{L_1, \dots, L_k\}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que :

(i) les lignes  $L_1, \dots, L_k$  sont deux à deux disjointes,

(ii)  $\bigcup_{i=1}^k S(L_i) = \tau$ .

Les lignes saillantes  $L_1, \dots, L_k$  définies en les conditions (i) et (ii) du lemme précédent sont appelées les lignes saillantes de  $\tau$ . On pose  $L(\tau) = \{L_1, \dots, L_k\}$ .

La figure 1.5 ci-dessous représente les lignes saillantes associées à la permutation  $\sigma = 3641725$ , c'est-à-dire les lignes saillantes de  $\hat{\sigma}$ .

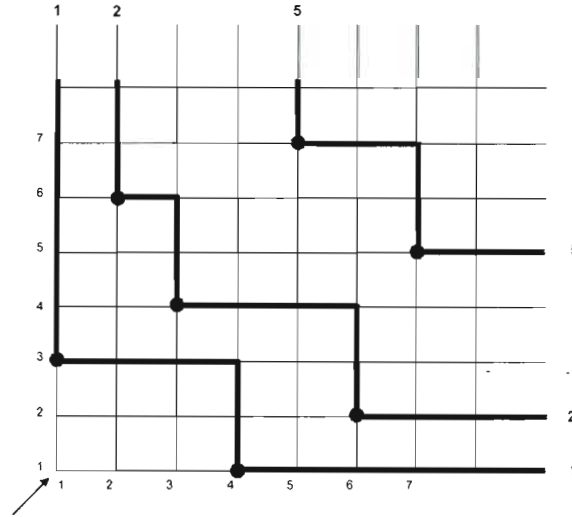


Figure 1.5 Les lignes saillantes de  $\sigma = 3641725$ .

**Définition 28** On appelle squelette de la quasi-permutation  $\tau$  la partie  $Sq(\tau)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  définie par :

$$Sq(\tau) = \bigcup_{i=1}^k S_d^+(L_i)$$

où  $L_1, \dots, L_k$  sont les lignes saillantes de  $\tau$ .

Le squelette d'une quasi-permutation  $\tau$  est encore une quasi-permutation dont le cardinal est celui de  $\tau$  diminué du nombre de lignes saillantes de  $\tau$ . En effet, ce résultat est une conséquence directe du fait que si une ligne saillante de  $\tau$  contient  $p$  points de  $\tau$ , alors elle contient forcément  $(p - 1)$  points de  $Sq(\tau)$  et du fait que chaque point de  $\tau$  appartient à une seule ligne saillante de  $\tau$ .

La permutation  $\sigma = 3641725$  de  $\mathcal{S}_7$  a pour squelette la quasi-permutation de  $[n]$  notée  $Sq(\sigma) = Sq(\hat{\sigma}) = 0063047$  et représentée par les croix de la figure 1.6 suivante :

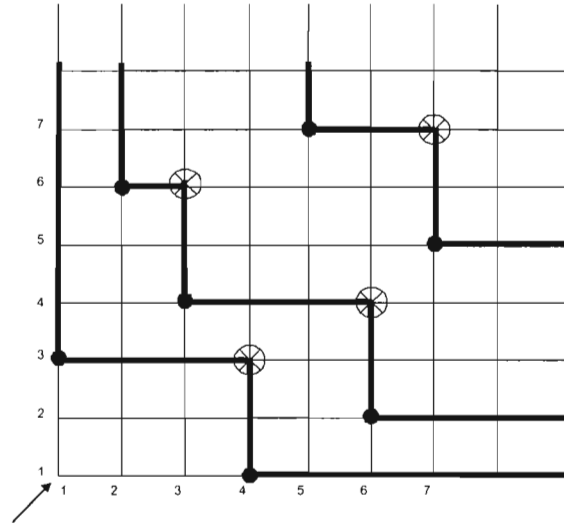


Figure 1.6 La permutation  $\sigma = 3641725$  et son squelette  $Sq(\sigma) = 0063047$ .

### 1.6.2 Squelette et correspondance de Schensted

Viennot a montré dans (Viennot, 1977) le résultat suivant :

*Si la correspondance de Schensted associe la paire de tableaux  $(P, Q)$  à la permutation  $\sigma$  et si  $\{L_1, \dots, L_k\}$  est l'ensemble des lignes saillantes de  $\sigma$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on a :*

$$P_{1i} = y_{L_i} \text{ et } Q_{1i} = x_{L_i}.$$

Ce résultat montre que les  $x$ -coordonnées des lignes saillantes d'une permutation  $\sigma$

sont exactement les éléments de la première ligne de son  $P$ -symbole  $P(\sigma)$  et que les  $y$ -coordonnées des lignes saillantes de  $\sigma$  sont exactement les éléments de la première ligne de son  $Q$ -symbole  $Q(\sigma)$ . On peut remarquer que cette propriété est vérifiée par la permutation  $\sigma = 3641725$  dont le  $P$ -symbole et le  $Q$ -symbole sont calculés à la sous section 1.4.3 et dont les  $x$ -coordonnées et les  $y$ -coordonnées de ses trois lignes saillantes sont illustrées en haut et à droite du diagramme de la figure 1.5 ci-dessus.

Maintenant, nous allons voir comment trouver le reste de  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$ . En effet, on a la définition suivante :

**Définition 29** *Soit  $\sigma$  une quasi-permutation de  $[n]$ . Nous définissons par récurrence les squelettes successifs de  $\sigma$  comme les quasi-permutations suivantes :*

$$Sq^0(\sigma) = \hat{\sigma} \text{ et pour } k \geq 0 : Sq^{k+1}(\sigma) = Sq(Sq^k(\sigma)),$$

et nous notons

$$Sq^*(\sigma) = \bigcup_{k \geq 0} Sq^k(\sigma).$$

On peut écrire  $Sq^0(\sigma) = \sigma$ . En effet, on peut identifier la quasi-permutation  $\hat{\sigma}$  relativement à son support à la permutation  $\sigma$ . Remarquons aussi que le cardinal des squelettes successifs diminue strictement, et à partir d'un certain rang les termes de la formule précédente deviennent vides. Les termes non vides forment alors une partition de  $Sq^*(\sigma)$ .

Comme  $Sq^k(\sigma)$  est une quasi-permutation, on va noter les lignes saillantes de  $Sq^k(\sigma)$  par  $L_j^k$ . Ainsi, on peut donner le théorème suivant qui montre que l'algorithme de Schensted revient à prendre les squelettes itérés de la permutation  $\sigma$ .

**Théorème 4** (Viennot) *Supposons que la correspondance de Schensted associe la paire  $(P, Q)$  à la permutation  $\sigma$ . Si cette correspondance associe la paire  $(P^{(k)}, Q^{(k)})$  à la quasi-permutation  $Sq^k(\sigma)$ , alors  $P^{(k)}$  (resp.  $Q^{(k)}$ ) est un tableau standard constitué de la ligne  $k+1$  du tableau  $P$  (resp.  $Q$ ) et des lignes de  $P$  (resp.  $Q$ ) qui sont au-dessus de*

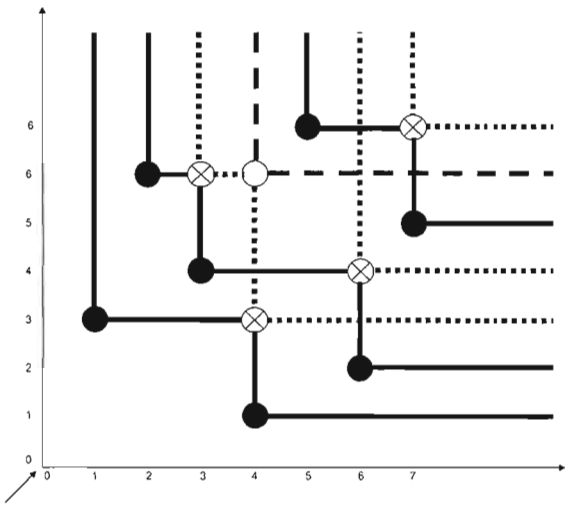


Figure 1.7 Les squelettes successifs de  $\sigma = 3641725$ .

cette ligne. De plus

$$P_{kj} = y_{L_j^k} \text{ et } Q_{kj} = x_{L_j^k} \text{ pour tous } k, j.$$

La figure 1.7 ci-dessous montre les squelettes successifs de la permutation  $\sigma = 3641725$ .

On a :

$$Sq(\sigma) = 0063047, Sq^2(\sigma) = 0006000 \text{ et pour tout } k \geq 3 : Sq^k(\sigma) = 0000000.$$

On a

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

On a

$$\begin{aligned} Sq(\sigma) &= 0063047 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique par la remarque 2 que

$$P^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad Q^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

On a

$$\begin{aligned} Sq^2(\sigma) &= 0006000 \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique par la remarque 2 que

$$P^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad Q^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}.$$

Pour tout  $k \geq 3$ , on a

$$Sq^k(\sigma) = 0000000,$$

ce qui implique que

$$P^{(k)} = \emptyset \quad \text{et} \quad Q^{(k)} = \emptyset \quad \text{pour tout } k \geq 3.$$

Maintenant, on peut montrer, comme l'a fait Viennot, le théorème suivant dû à Schützenberger (Schützenberger, 1963).

**Théorème 5** *Si  $\sigma \in S_n$ , alors*

$$P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma) \quad \text{et} \quad Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

Le passage  $\sigma \longrightarrow \sigma^{-1}$  revient simplement à échanger le rôle des lignes et des colonnes de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Ainsi, le diagramme qui illustre les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma^{-1}$  est symétrique par rapport à la droite  $y = x$  au diagramme qui illustre les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma$ .

## 1.7 Glissements du jeu de taquin de Schützenberger

Schützenberger a introduit le jeu de taquin, au sens où on l'entend ici, dans les années 70 (Schützenberger, 1977), au cours de ses recherches sur les tableaux de Young, la transformation de Robinson-Schensted, les relations de Knuth et leur interprétation algébrique et aussi sur le monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger. Le jeu de taquin a permis à Schützenberger de donner une des deux premières preuves complètes de la profonde règle de Littlewood-Richardson (l'autre preuve, apparue au même moment, est due à G. P. Thomas (Thomas, 1978)). Cette règle, énoncée dans les années 30, permet de multiplier les fonctions de Schur et de calculer des produits tensoriels externes des représentations du groupe symétrique, et par conséquent a aussi des applications en physique théorique.

Maintenant, on donne la définition des glissements du jeu de taquin de Schützenberger.

**Définition 30** *Soit  $P$  un tableau gauche standard de forme  $\lambda/\mu$ . Nous effectuons un glissement en avant sur  $P$  à partir d'une case  $c$  comme suit :*

- 1) : *choisissons  $c$  un coin intérieur de  $\mu$*
- 2) : *tant que  $c$  n'est pas coin intérieur de  $\lambda$ , on suit les étapes suivantes :*
  - a) : *si  $c = (i, j)$ , alors posons  $c'$  la case de  $\min \{P(i+1, j), P(i, j+1)\}$*
  - b) : *glisser  $P_{c'}$  dans la case  $c$  et poser  $c := c'$ .*

*Si une seulement des entrées  $P(i+1, j)$ ,  $P(i, j+1)$  existe dans l'étape a), alors on prend le minimum comme étant cette seule valeur. On dénote le tableau résultant par  $J^c(P)$ .*

*De même un glissement en arrière sur  $P$  à partir d'une case  $c$  produit un tableau  $J_c(P)$  comme suit :*

- 1) : *choisissons  $c$  un coin extérieur de  $\lambda$*
- 2) : *tant que  $c$  n'est pas coin extérieur de  $\mu$ , on suit les étapes suivantes :*
  - a) : *si  $c = (i, j)$ , alors posons  $c'$  la case de  $\max \{P(i-1, j), P(i, j-1)\}$*

b) : glisser  $P_{c'}$  dans la case  $c$  et poser  $c := c'$ .

Si une seulement des entrées  $P(i-1, j)$ ,  $P(i, j-1)$  existe dans l'étape a), alors on prend le maximum comme étant cette seule valeur.

Par exemple, soit

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline & 1 & 4 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

On va effectuer un glissement en avant sur  $g$  à partir de la case  $u_0 = (2, 1)$  comme suit :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline \bullet & 1 & 4 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & \bullet & 4 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 4 & \bullet & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & \bullet & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

On écrit

$$J^{u_0}(g) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

On peut effectuer ce glissement en utilisant la traînée correspondante. Pour un tableau  $g$  et un coin intérieur  $u_0$  de  $g$ , la traînée correspondante est l'ensemble des cases  $u_1, u_2, \dots, u_k$  de  $g$  telles que pour tout  $i$ , la case  $u_i$  est l'une des cases voisines situées à droite ou en haut de la case  $u_{i-1}$  qui contient l'élément le plus petit. Ainsi le glissement en avant, est l'opération qui transforme le tableau  $g$  en le tableau  $J^{u_0}(g)$ , obtenu en mettant dans  $u_{i-1}$  le contenu de  $u_i$ . Par exemple, voici ci-dessous le tableau  $g$ , le coin intérieur (la case contenant un  $\bullet$ ) et la traînée correspondante constitué de ce coin

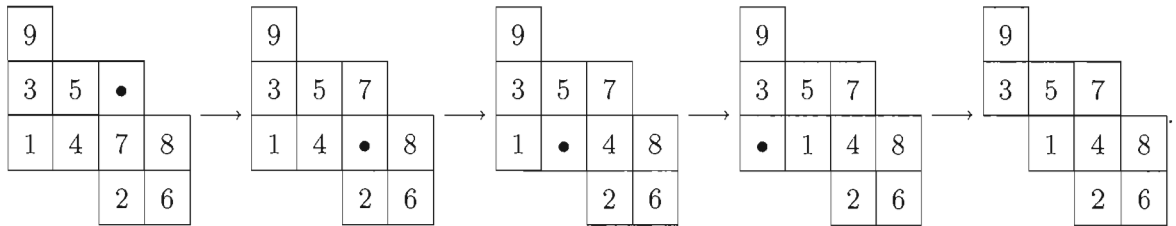


intérieur et des cases contenant les éléments écrits en gras

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline \bullet & 1 & 4 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Après le glissement, on obtient le tableau  $J^{u_0}(g)$  donné ci-haut. Remarquons que la case qui a été évacué est la case  $v_0 = (3, 3)$ .

On va effectuer un glissement en arrière sur  $J^{u_0}(g)$  à partir de la case  $v_0$  comme suit :



On écrit

$$J_{v_0}(J^{u_0}(g)) = g.$$

On peut effectuer ce glissement en utilisant la traînée inverse correspondante. Pour un tableau  $g$  et un coin extérieur  $v_0$  de  $g$ , la traînée inverse correspondante est l'ensemble des cases  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de  $g$  telles que pour tout  $i$ , la case  $v_i$  est l'une des cases voisines situées à gauche ou en bas de la case  $v_{i-1}$  qui contient l'élément le plus grand. Ainsi le glissement en arrière, est l'opération qui transforme le tableau  $g$  en le tableau  $J_{v_0}(g)$ , obtenu en mettant dans  $v_{i-1}$  le contenu de  $v_i$ . Par exemple, voici le tableau  $J^{(2,1)}(g)$ , le coin extérieur  $(3, 3)$  et la traînée inverse correspondante

$$J^{(2,1)}(g) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 3 & 5 & \bullet & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 8 \\ \hline & & 2 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Après le glissement, on obtient le tableau  $g$  donné ci-haut. Remarquons que la case qui a été évacué est la case  $u_0 = (2, 1)$ .

Notons qu'un glissement est une opération inversible. En effet, si  $u_0$  est un coin intérieur d'où a commencé un glissement en avant sur  $g$  et la case qui a été évacuée par ce glissement est  $v_0$ , alors un glissement en arrière à partir de  $v_0$  sur  $J^{u_0}(g)$  produit  $g$ . En d'autres mots,

$$J_{v_0}(J^{u_0}(g)) = g.$$

De même,

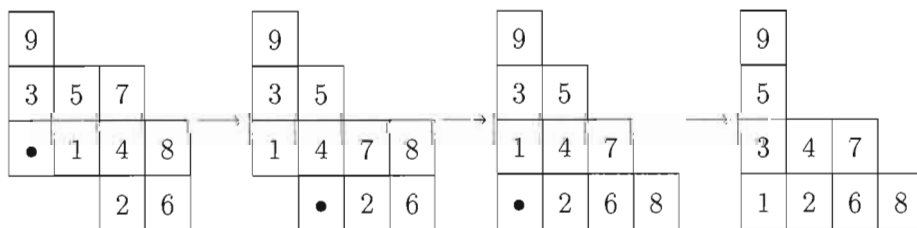
$$J^{u_0}(J_{v_0}(g)) = g.$$

**Définition 31** Une suite de cases  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  est une suite de glissements pour un tableau gauche standard  $g$  si on peut former la suite  $g = g_0, g_1, \dots, g_k$ , où  $g_i$  est obtenu à partir de  $g_{i-1}$  par un glissement à partir de la case  $u_i$ . Deux tableaux gauches standards  $g$  et  $g'$  sont équivalents et on écrit  $g \cong g'$  si  $g'$  peut être obtenu à partir de  $g$  par une certaine suite de glissements.

Un redressement d'un tableau gauche standard consiste à appliquer une suite de ces glissements pour obtenir un tableau de Young standard. Le théorème suivant montre qu'il n'y a qu'un résultat possible pour le redressement, autrement dit que le choix des glissements intermédiaires n'importe pas sur le résultat final ((Sagan, 2001), théorème 3.7.7). Le tableau de Young standard résultant est appelé le redressé de  $g$  et dénoté  $J(g)$ .

**Théorème 6** (Shützenberger) Si  $g$  est un tableau gauche standard, alors  $J(g)$  est unique. De plus  $J(g)$  est le  $P$ -symbole de la permutation  $\text{read}(g)$ .

Par exemple, voici le processus de redressement du tableau gauche standard  $g$  précédent.



Ainsi,

$$J(g) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 3 & 4 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 6 & 8 \\ \hline \end{array} .$$

Les glissements du jeu de taquin sont compatibles avec la relation d'équivalence de Knuth.

**Théorème 7** (Schützenberger, 1976) *Si  $P$  et  $Q$  sont deux tableaux gauches standards, alors*

$$P \cong Q \iff P \stackrel{K}{\cong} Q.$$

**Définition 32** *Deux tableaux gauches standards  $P$  et  $Q$  sont dualement équivalents et on écrit  $P \stackrel{*}{\cong} Q$  si à chaque fois qu'on applique la même suite de glissements à  $P$  et à  $Q$ , on obtient deux tableaux ayant la même forme.*

**Théorème 8** (Haiman, 1992) *Si  $P$  et  $Q$  sont deux tableaux gauches standards de même forme  $\lambda/\mu$ , alors*

$$P \stackrel{*}{\cong} Q \iff P \stackrel{K^*}{\cong} Q.$$

Un tableau gauche standard peut être utilisé pour déterminer une suite de glissements qu'on peut appliquer à un autre tableau gauche standard. En effet, soient  $P$  et  $Q$  deux tableaux gauches standards de forme  $\lambda/\mu$  et  $\mu/\nu$  respectivement. Les cases de  $P$ , prises dans l'ordre déterminé par les entrées de  $P$ , forment une suite de glissements en arrière sur  $Q$ . On note le tableau obtenu en appliquant cette suite de glissements à  $Q$  par  $J_P(Q)$ . Durant la construction de  $J_P(Q)$ , les cases évacuées forment un diagramme gauche qui donne un tableau gauche standard qu'on note par  $V : J_P(Q)$  en remplissant chaque case évacuée par le même élément de la case de  $P$  qui a été remplie, c'est-à-dire d'où le glissement en arrière a commencé. On peut aussi utiliser les cases de  $Q$ , prises dans l'ordre inverse déterminé par les entrées de  $Q$ , pour former une suite de glissements en avant sur  $P$ . On note le tableau obtenu en appliquant cette suite de glissements à  $P$

par  $J^Q(P)$ . Durant la construction de  $J^Q(P)$ , les cases évacuées forment un diagramme gauche qui donne un tableau gauche standard qu'on note par  $V : J^Q(P)$  en remplissant chaque case évacuée par le même élément de la case de  $Q$  qui a été remplie, c'est-à-dire d'où le glissement en avant a commencé. Par exemple,

$$P = \begin{array}{cccc} & & 2 & \\ & 5 & 7 & \\ & & 3 & 8 \\ & 1 & 6 & \\ & & 4 & \end{array} \quad \text{et} \quad Q = \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 2 & 5 & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{array}$$

sont deux tableaux de Young standards de forme  $4^3 31 / 32^2 1$  et  $32^2 1 / 21$  respectivement. Alors, on peut vérifier que

$$J_P(Q) = \begin{array}{ccc} & 4 & \\ & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \end{array} \quad \text{et} \quad V : J_P(Q) = \begin{array}{cccc} & 5 & & \\ 2 & 7 & & \\ & 3 & 6 & 8 \\ & 1 & 4 & \end{array}.$$

On peut vérifier aussi que

$$J^Q(P) = \begin{array}{ccc} 5 & & \\ 2 & 7 & \\ & 3 & 6 & 8 \\ & 1 & 4 & \end{array} = V : J_P(Q) \quad \text{et} \quad V : J^Q(P) = \begin{array}{ccc} 4 & & \\ & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \end{array} = J_P(Q).$$

**Théorème 9** (Haiman, 1992) Si  $P$  et  $Q$  sont deux tableaux gauches standards de même forme  $\lambda/\mu$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1)  $P \cong^* Q$

(2)  $V : J^X(P) = V : J^X(Q)$  pour un certain tableau de Young standard  $X$  de forme  $\nu$  tel que  $\nu \cup (\lambda/\mu)$  est un diagramme de Ferrers.

## 1.8 Algorithme d'évacuation de Schützenberger

### 1.8.1 Algorithme de suppression du plus petit élément

Il est clair que l'élément situé complètement dans le côté inférieur gauche d'un tableau standard est le plus petit élément parmi les éléments de ce tableau. L'algorithme de suppression du plus petit élément, consiste à supprimer cet élément et à réarranger les éléments restants de sorte qu'ils forment un autre tableau standard. Plus précisément, cet algorithme consiste à supprimer cet petit élément et ensuite redresser le tableau gauche standard composé des cases restantes en effectuant un glissement en avant du jeu de taquin de Schützenberger sur ce tableau gauche à partir de la case contenant ce petit élément.

Regardons ce qui se passe si nous supprimons le plus petit élément du tableau de Young standard donné ci-dessous. Si le 1 est supprimé, le 2 vient prendre sa place. Ainsi le 4 se déplace pour prendre la place où était le 2 mais le 10 ne peut pas prendre la position de 4 ; le 9 peut être déplacé vers la place de 4 et le 12 vers la place de 9. En général, ceci nous amène à la procédure suivante :

16						
10	12					
4	9	13				
2	6	8	14			
1	3	5	7	11	15	

Algorithme de suppression du plus petit élément

*Soit  $P$  un tableau standard à  $n$  éléments. L'algorithme de suppression du plus petit élément dans  $P$  définit un nouveau tableau qu'on note  $\Delta P$  à  $(n - 1)$  éléments de la manière suivante :*

*On supprime le plus petit élément situé complètement dans le côté inférieur gauche de  $P$  et on déplace les autres éléments de sorte que les propriétés des tableaux standards sont*

préservées. Plus précisément, cet algorithme consiste à remplacer la plus petite cellule (celle contenant le plus petit élément qu'on notera  $x$ ), par une cellule vide et d'échanger récursivement cette cellule vide avec la plus petite des deux cellules situées à sa droite et au dessus, le processus se terminant lorsque la cellule vide arrive sur la frontière du tableau.

Par exemple, si  $T$  est le tableau

11			
4	8		
2	5	7	9

alors

$$\Delta T =$$

11			
8			
4	5	7	9

### 1.8.2 Algorithme d'évacuation

L'algorithme d'évacuation ou de “vidage-remplissage”, introduit par Schützenberger, est défini comme suit :

**Définition 33** Soit  $P$  un tableau standard à  $n$  éléments. L'algorithme d'évacuation définit un nouveau tableau qu'on note  $ev(P)$  à  $n$  éléments de la manière suivante :

On remplace récursivement la plus petite cellule (celle contenant le plus petit élément) par une cellule vide et on échange cette cellule vide avec la plus petite des deux cellules situées à sa droite et au dessus, le processus se terminant lorsque la cellule vide arrive sur la frontière du tableau ; on étiquette alors cette cellule vide par le plus grand élément que nous considérons comme un élément de  $ev(P)$  et pas un élément de  $P$ .

Par exemple, pour le tableau

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 5 & 8 & \\ \hline 4 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

la figure ci-dessous présente ce principe d'évacuation

<div>6 5 8 4 7 9 2 3</div>	<div>6 5 8 4 7 9 2 3</div>	<div>6 5 8 4 7 9 2 3</div>	<div>6 5 8 4 7 2 3 9</div>	<div>6 5 8 4 7 9 2 3 9</div>
<div>6 5 8 4 7 9 3 9</div>	<div>6 5 8 4 7 9 3 9</div>	<div>6 5 8 4 9 3 7 9</div>	<div>6 5 4 8 9 3 7 9</div>	<div>6 5 8 4 8 9 3 7 9</div>
<div>6 5 8 4 8 9 7 9</div>	<div>6 5 8 8 9 4 7 9</div>	<div>6 8 5 8 9 4 7 9</div>	<div>6 8 5 8 9 4 7 9</div>	<div>7 6 8 5 8 9 4 7 9</div>
<div>7 6 8 5 8 9 7 9</div>	<div>7 6 8 8 9 5 7 9</div>	<div>7 8 6 8 9 5 7 9</div>	<div>7 6 8 6 8 9 5 7 9</div>	<div>7 6 8 6 8 9 7 9</div>
<div>7 6 8 8 9 6 7 9</div>	<div>7 6 8 8 9 6 7 9</div>	<div>7 6 8 8 5 9 6 7 9</div>	<div>7 6 8 8 5 9 7 9</div>	<div>7 6 8 8 5 9 7 9</div>





Ce nouveau tableau  $ev(P)$  à la même forme que le tableau  $P$  considéré.

À partir de  $ev(P)$  on peut déterminer d'une manière unique le tableau  $P$  en appliquant la même procédure et en renversant les rôles du gras et du régulier. Autrement dit l'opération d'évacuation est une involution, c'est-à-dire :

$$ev(ev(P)) = P.$$

Le théorème suivant montre que les opérations d'évacuation et de transposition commutent.

**Théorème 10** *Si  $P$  est un tableau de Young standard, alors*

$$ev(P^T) = (ev(P))^T.$$



## CHAPITRE II

### MOTS DE YAMANOUCHI ET STANDARDISATION

Nous commencerons ce chapitre par donner des rappels sur les mots de Yamanouchi qui sont en bijection avec les tableaux de Young standards. Ensuite nous définirons le standardisé gauche et droit d'un mot  $w$ , notés  $st_g(w)$  et  $st_d(w)$ . Puis nous montrerons que pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$  et pour tout  $1 \leq k \leq |w| - 1$ , on a :

$$(st_g(w))^{-1}|_{[k]} = (st_g(pref_k(w)))^{-1}$$

et

$$st_d\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1, \dots, |w|\}}\right) = (st_d(suff_{|w|-k}(w)))^{-1}.$$

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser une expression pour  $read(g)$  et une expression pour  $row(g)$  où  $g$  est un tableau gauche standard et  $read(g)$  et  $row(g)$  sont deux mots associés au tableau  $g$ . Ces expressions généralisent les expressions connues de  $read(t)$  et de  $row(t)$  pour  $t$  un tableau de Young standard. Ensuite, nous utiliserons les arrangements de M. A. A. van Leeuwen pour interpréter géométriquement les standardisations à gauche et à droite d'un mot quelconque. Nous donnerons aussi une autre interprétation géométrique en utilisant les tableaux gauches standards. Nous associerons à chaque arrangement  $\mathbf{a}$  deux mots qu'on note par  $read(\mathbf{a})$  et  $row(\mathbf{a})$ , de la même manière utilisée pour les tableaux de Young standards et les tableaux gauches standards. Nous montrerons que le résultat précédent peut être généralisé aux arrangements. Ensuite, nous utiliserons les interprétations géométriques précédentes, des standardisations à gauche et à droite, pour montrer d'une manière très naturelle tous les résultats de ce

chapitre et pour montrer que pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$

$$(st_g(w))^{-1} = \left( \left( st_d(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} \right)^* = \left( (st_d(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}}$$

et

$$\left( (st_d(w))^{-1} \right)^* = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} = \left( \left( (st_g(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^*.$$

Finalement, nous définirons une paire de Yamanouchi indécomposable. Ensuite nous montrerons que les paires de Yamanouchi indécomposables de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ . Par la bijection de Sillke (Chapitre 6), elles sont aussi en bijection avec les hypercartes pointées à  $n - 1$  points. Nous poserons le problème ouvert de trouver cette dernière bijection explicitement sans utiliser les permutations connexes.

## 2.1 Mots de Yamanouchi

Rappelons que  $\mathbb{P} := \{1, 2, 3, \dots\}$  est l'ensemble des entiers positifs et que  $\mathbb{P}^*$  dénote le monoïde libre sur  $\mathbb{P}$ .

Pour tout mot  $w$  et pour toute lettre  $x$ ,  $|w|$  dénote la longueur de  $w$  et  $|w|_x$  dénote le nombre d'occurrences de la lettre  $x$  dans  $w$ . On dénote par  $\mathbb{P}^n$  le sous-ensemble de  $\mathbb{P}^*$  constitué de tous les mots de longueur  $n$ .

Un mot  $w$  est dit un préfixe d'un mot  $u$  s'il existe un mot  $v$  tel que  $u = wv$ . Un mot  $w$  est dit un suffixe d'un mot  $u$  s'il existe un mot  $v$  tel que  $u = vw$ . On dénote le préfixe de  $u$  de longueur  $k$  pour un certain  $k \leq |u|$  par  $\text{préf}_k(u)$  et on dénote le suffixe de  $u$  de longueur  $k$  par  $\text{suff}_k(u)$ .

L'image miroir d'un mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_n$  est le mot  $u^* = a_n a_{n-1} \cdots a_1$ .

Si  $u \in \mathbb{P}^n$  et  $K \subseteq \mathbb{P}$ , alors on note par  $u|_K$  le mot obtenu de  $u$  en supprimant toutes les lettres de  $u$  qui n'appartiennent pas à  $K$ . Par exemple,  $(1232442143)|_{\{3,4,7\}} = 34443$ .

**Définition 34** Soit  $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathbb{P}^*$ . Pour tout  $i \in [n]$ , l'indice d'une lettre  $a_i > 1$

de  $u$ , qu'on note par  $i_u(a_i)$ , est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 i_u(a_i) &= |a_1 \cdots a_i|_{a_i} - |a_1 \cdots a_{i-1}|_{a_{i-1}} \\
 &= |a_1 \cdots a_i|_{a_i} - |a_1 \cdots a_i|_{a_{i-1}} \\
 &= |a_1 \cdots a_{i-1}|_{a_i} - |a_1 \cdots a_{i-1}|_{a_{i-1}} + 1.
 \end{aligned}$$

Remarquons que deux lettres de  $u$  peuvent être égales tout en ayant des indices différents. Par exemple, pour  $u = 1122$ , la première lettre 2, située à gauche, a un indice égal à  $-1$  alors que la deuxième lettre 2, située à droite, a un indice égal à 0.

Pour montrer le résultat principal de la section 4.4 du chapitre 4, nous aurons besoin du lemme suivant qui donne un résultat sur l'indice d'une lettre.

**Lemme 2** Soient  $u, v \in \mathbb{P}^*$  tels que  $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ . Comparer les indices  $i_u(a_i)$  et  $i_u(a_j)$  de deux lettres  $a_i$  et  $a_j$  de  $u$  telles que  $a_i = a_j$  est équivalent à comparer les indices  $i_{vu}(a_i)$  et  $i_{vu}(a_j)$ .

**Preuve**

On a :

$$\begin{aligned}
 i_u(a_i) &= |a_1 \cdots a_i|_{a_i} - |a_1 \cdots a_{i-1}|_{a_{i-1}} \\
 &= |va_1 \cdots a_i|_{a_i} - |v|_{a_i} - |va_1 \cdots a_{i-1}|_{a_{i-1}} + |v|_{a_{i-1}} \\
 &= (|va_1 \cdots a_i|_{a_i} - |va_1 \cdots a_{i-1}|_{a_{i-1}}) - (|v|_{a_i} - |v|_{a_{i-1}}) \\
 &= i_{vu}(a_i) - M_{a_i}(v),
 \end{aligned}$$

où

$$M_{a_i}(v) = |v|_{a_i} - |v|_{a_{i-1}}.$$

Comme  $a_i = a_j$ , on a  $M_{a_i}(v) = M_{a_j}(v)$ . Ainsi

$$i_u(a_i) \geq i_u(a_j) \Leftrightarrow i_{vu}(a_i) \geq i_{vu}(a_j).$$

□

**Définition 35** *Un mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathbb{P}^*$  est un mot de Yamanouchi de longueur  $n$  si l'on a :*

$$i_u(a_i) \leq 0, \text{ pour tout } i \in [n] \text{ tel que } a_i > 1.$$

En d'autre mots, un mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathbb{P}^*$  est un mot de Yamanouchi de longueur  $n$  si pour chaque préfixe  $v$  de  $u$  on a :

$$|v|_1 \geq |v|_2 \geq |v|_3 \geq \dots .$$

On note l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi par  $\mathcal{Y}$  et l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi de longueur  $n$  par  $\mathcal{Y}_n$ .

Rappelons qu'un partage  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0)$  de  $n$  est une suite décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme donne  $n$ . Remarquons que si  $k$  est la plus grande lettre du mot de Yamanouchi  $u$ , alors les entiers  $|u|_1, |u|_2, \dots, |u|_k$  forment une suite décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme donne  $n$ . Ainsi, en posant

$$\lambda = (|u|_1 \geq |u|_2 \geq \cdots \geq |u|_k > 0),$$

on obtient que  $\lambda$  est un partage de  $n$  et on dit que  $u$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\lambda$ . Par exemple, le mot  $u = 1123211324423111$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\lambda = (7, 4, 3, 2)$ . On note l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi de forme  $\lambda$ , un partage de  $n$ , par  $\mathcal{Y}_{n,\lambda}$ .

La notion, bien connue, de mot de Yamanouchi est un certain codage des tableaux de Young standards (Foata, 1976). En effet, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 2** *Les mots de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  sont en bijection avec les tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ .*

En effet, on peut identifier un mot de Yamanouchi de forme  $\lambda$  à un tableau de Young standard de forme  $\lambda$ . La  $i$ -ème lettre dans ce mot égale à  $j$  si et seulement si la  $j$ -ème ligne du tableau associé contient l'élément  $i$ . Par exemple, le mot

de Yamanouchi 1121324 de forme  $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ , peut être identifié au tableau  $T$ , un tableau de Young standard de forme  $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ , tel que

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} .$$

On écrit

$$\omega(T) = 1121324.$$

Plus précisément, on peut donner cette bijection comme suit :

soit

$$\begin{aligned} \omega : \text{TYS}^\lambda &\longrightarrow \mathcal{Y}_{n,\lambda} \\ T &\longmapsto \omega(T) \end{aligned}$$

définie par la condition suivante :

Pour tout  $T = \{T_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$  un tableau de Young standard de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  ; on définit  $\omega(T) = w_1 w_2 \dots w_n$  par :

$$w_i = \text{le numéro de la ligne où est placé } i.$$

On peut remarquer facilement que si  $T$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments, alors

$$\text{pref}_k(\omega(T)) = \omega(T| [k]).$$

Nous aurons besoin d'une notion qui raffine celle de mot de Yamanouchi.

**Définition 36** *Un mot  $u = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbb{P}^*$  est un mot de Yamanouchi sur  $[k]$  où  $k \in \mathbb{P}$ , si l'on a :*

$$u|_{[k]} \in \mathcal{Y}.$$

On peut déduire que

$$i_u(a_i) \leq 0, \text{ pour tout } i \in [n] \text{ tel que } 1 < a_i \leq k.$$

Ainsi, un mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathbb{P}^*$  est un mot de Yamanouchi sur  $[k]$  si pour chaque préfixe  $w$  de  $u$  on a :

$$|w|_1 \geq |w|_2 \geq \dots \geq |w|_k.$$

Par exemple,  $u = 4112324444$  n'est pas un mot de Yamanouchi, cependant il est un mot de Yamanouchi sur  $[3]$ .

Notons que  $u \in \mathbb{P}^n$  est un mot de Yamanouchi si et seulement si  $u$  est un mot de Yamanouchi sur  $[k]$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Notons aussi que  $u$  est un mot de Yamanouchi si et seulement si chaque préfixe de  $u$  est un mot de Yamanouchi.

**Proposition 3** *Soient  $\lambda \vdash n$  et  $\mu \vdash m$  tels que  $\mu \subseteq \lambda$ . Les tableaux gauches standards de forme  $\lambda/\mu$  à  $n - m$  éléments  $1, 2, \dots, n - m$ , sont en bijection avec les suffixes de longueurs  $n - m$  des mots de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  et dont le préfixe de longueur  $m$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\mu \vdash m$ .*

En effet, on peut donner cette bijection comme suit :

soit

$$\begin{aligned} \omega_g : \quad \text{TGS}^{\lambda/\mu} &\longrightarrow \{w \in \mathbb{P}^{n-m} \mid \exists v \in \mathcal{Y}_{m,\mu} : u = vw \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}\} \\ g &\longmapsto \omega_g(g) \end{aligned}$$

définie par la condition suivante :

Pour tout  $g = \{g_{ij} \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } \mu_i \leq j \leq \lambda_i\}$  un tableau gauche standard de forme  $\lambda/\mu$  avec  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell) \vdash m$  à  $n - m$  éléments  $1, 2, \dots, n - m$  ; on définit  $\omega_g(g) = w = w_1 w_2 \dots w_{n-m}$  par :

$$w_i = \text{le numéro de la ligne où est placé } i.$$

Il est clair que  $w \in \mathbb{P}^{n-m}$ . Soit  $S$  un tableau de Young standard de forme  $\mu \vdash m$  et  $t = S \cup g$ . Alors,  $t$  est un tableau de Young standard de forme  $\lambda \vdash n$ . Posons  $\omega(S) = v$  et  $\omega(t) = u$ . Il est clair que  $u = vw$ . Il est clair aussi que  $u \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}$  et que  $v \in \mathcal{Y}_{m,\mu}$ .

La bijection inverse est donnée comme suit :

$$\omega_g^{-1}(w) = g$$



où  $g = st(\omega^{-1}(u) \mid [m+1, n])$ . Comme  $pref_m(u)$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\mu$ , alors  $g \in TGS^{\lambda/\mu}$ .

Remarquons que si  $g$  est un tableau de Young standard, alors  $\omega_g(g) = \omega(g)$ .

Par exemple, pour  $u = vw = 112213123$  un mot de Yamanouchi et  $v = 112$  un préfixe de  $u$ , on a le suffixe  $w = 213123$  qui est de forme  $(4, 3, 2) / (2, 1)$  qu'on peut identifier au tableau gauche standard

$$g = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline & 1 & 5 \\ \hline & & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

qui est le standardisé du tableau gauche standard suivant :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline & 4 & 8 \\ \hline & & 5 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

## 2.2 Généralisation d'un résultat pour $read(t)$ et $row(t)$ des tableaux de Young standards aux tableaux gauches standards

Dans toute la suite de cette thèse, on considère, dans certaines situations, toutes les lettres d'un mot  $w$  comme étant deux à deux différentes. Il suffit d'étiqueter les lettres de  $w$  égales à 1 par  $1, 2, 3, \dots$  de gauche à droite, ensuite étiqueter les lettres de  $w$  égales à 2 par  $1, 2, 3, \dots$  de gauche à droite et réitérer ce processus pour les lettres de  $w$  égales à 3, les lettres de  $w$  égales à 4 et ainsi de suite. Par exemple, pour  $w = 213233$ . On écrit  $w = 2_1 1_1 3_1 2_2 3_2 3_3$  et par la suite toutes les lettres de  $w$  sont deux à deux différentes comme par exemple les deux lettres de  $w$  égales à 2 sont différentes car  $2_1 \neq 2_2$ .

**Définition 37** Soit  $w = a_1 \cdots a_n \in \mathbb{P}^n$ . La permutation standardisée à gauche de  $w$ , qu'on note par  $st_g(w)$ , est définie comme suit :

$$st_g(w) = f_w(a_1) \cdots f_w(a_n) \in \mathcal{S}_n,$$

où  $f_w$  est l'unique fonction de l'ensemble des lettres de  $w$ , considérées comme étant deux à deux différentes, sur l'ensemble  $[n]$  qui vérifie pour tous  $i, j \in [n]$  :

$$f_w(a_i) < f_w(a_j) \text{ si } a_i < a_j \text{ ou } (a_i = a_j \text{ et } i < j).$$

On peut obtenir  $st_g(w)$  à partir de  $w$  comme suit : on remplace les lettres dans  $w$  égales à 1 respectivement par  $1, 2, \dots, |w|_1$  de gauche à droite. Ensuite, on remplace les lettres dans  $w$  égales à 2 respectivement par  $|w|_1 + 1, |w|_1 + 2, \dots, |w|_1 + |w|_2$  de gauche à droite. On réitère ce processus pour les lettres égales à 3, les lettres égales à 4 et ainsi de suite. Par exemple, pour  $w = 112321$ , on a :  $st_g(w) = 124653 \in S_6$ .

**Définition 38** Soit  $w = a_1 \cdots a_n \in \mathbb{P}^n$ . La permutation standardisée à droite de  $w$ , qu'on note par  $st_d(w)$ , est définie comme suit :

$$st_d(w) = h_w(a_1) \cdots h_w(a_n) \in S_n,$$

où  $h_w$  est l'unique fonction de l'ensemble des lettres de  $w$ , considérées comme étant deux à deux différentes, sur l'ensemble  $[n]$  qui vérifie pour tous  $i, j \in [n]$  :

$$h_w(a_i) < h_w(a_j) \text{ si } a_i < a_j \text{ ou } (a_i = a_j \text{ et } i > j).$$

On peut obtenir  $st_d(w)$  à partir de  $w$  comme suit : on remplace les lettres dans  $w$  égales à 1 respectivement par  $1, 2, \dots, |w|_1$  de droite à gauche. Ensuite, on remplace les lettres dans  $w$  égales à 2 respectivement par  $|w|_1 + 1, |w|_1 + 2, \dots, |w|_1 + |w|_2$  de droite à gauche. On réitère ce processus pour les lettres égales à 3, les lettres égales à 4 et ainsi de suite. Par exemple, pour  $w = 112321$ , on a :  $st_d(w) = 325641 \in S_6$ .

Soient  $w \in \mathbb{P}^*$  et  $k \in \mathbb{P}$  la plus grande lettre de  $w$ . Le complément de  $w$ , qu'on note par  $w^{\text{compl}}$ , est le mot obtenu de  $w$  en échangeant 1 et  $k$  ensuite 2 et  $k-1$  et ainsi de suite. Par exemple, le complément de 11223 est 33221. Plus précisément, on peut donner la définition suivante :

**Définition 39** Soit  $w = a_1 \cdots a_n$  et soit  $k \in \mathbb{P}$  la plus grande lettre de  $w$ . Le complément de  $w$  est défini comme suit :

$$w^{compl} = b_1 \cdots b_n \text{ où } b_i = k + 1 - a_i \text{ pour tout } i \in [n].$$

Dans le cas particulier où  $w \in \mathcal{S}_n$ , on peut remarquer facilement que  $n$  est la plus grande lettre de  $w$  et que

$$w^{compl} = \omega_{0,n} \circ w.$$

Notons que si  $t$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments, alors on peut calculer la permutation  $\text{read}(t)$  à partir du mot de Yamanouchi  $\omega(t)$  associé à  $t$  comme suit :

$$\text{read}(t) = \left( st_g \left( (\omega(t))^{compl} \right) \right)^{-1}.$$

Ce résultat est démontré dans (Blessenohl et Schocker, 2005) et aussi dans (Malvenuto et Reutenauer, 2009).

La proposition suivante donne un résultat équivalent en utilisant la standardisation à droite au lieu de la standardisation à gauche.

**Proposition 4** Pour tout  $t$  un tableau de Young standard, on a :

$$\text{read}(t) = \left( (st_d(\omega(t)))^{-1} \right)^*.$$

Pour donner la preuve de cette proposition, on va utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3** Pour tout  $w \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}$  avec  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0)$ , on a :

$$\gamma_\lambda \circ st_g(w) = st_d(w).$$

où  $\gamma_\lambda$  est l'unique permutation de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_\lambda$ .

### Preuve

Supposons que  $w = a_1 \cdots a_n$  et que  $st_g(w) = f_w(a_1) \cdots f_w(a_n) \in \mathcal{S}_n$  et que  $st_d(w) = h_w(a_1) \cdots h_w(a_n) \in \mathcal{S}_n$ . Il suffit de montrer que  $(\gamma_\lambda \circ st_g(w))(i) = (st_d(w))(i)$  pour

tout  $i \in [n]$ . Ceci est équivalent à

$$(\gamma_\lambda \circ f_w)(a_i) = h_w(a_i) \text{ pour tout } i \in [n].$$

Supposons que  $f_w(a_i) = m$ , ainsi le nombre de lettres égales à  $a_i$  dans le mot  $a_1 \cdots a_i$  est  $m - (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1})$ . Par conséquent, le nombre de lettres égales à  $a_i$  dans le mot  $a_i \cdots a_n$  est

$$\lambda_{a_i} - (m - (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1})) + 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i} - m + 1,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} h_w(a_i) &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i} - m + 1) \\ &= 2(\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}) + \lambda_{a_i} - m + 1. \end{aligned}$$

Comme  $1 \leq m - (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}) \leq \lambda_{a_i}$ , alors

$$\begin{aligned} (\gamma_\lambda \circ f_w)(a_i) &= \gamma_\lambda(m) \\ &= \gamma_\lambda((\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}) + (m - (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}))) \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i}) - (m - (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1})) + 1 \\ &= 2(\lambda_1 + \dots + \lambda_{a_i-1}) + (\lambda_{a_i} - m + 1) \\ &= h_w(a_i). \end{aligned}$$

□

Maintenant, on donne la preuve de la proposition précédente.

### Preuve

Utilisant le fait que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$(\omega_{0,n} \circ \sigma)^{-1} = (\sigma^{-1})^*$$

et que pour tout  $w \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}$ ,

$$st_g(w^{\text{compl}}) = \omega_{0,n} \circ \gamma_\lambda \circ st_g(w).$$

Ce dernier résultat est donné dans (Malvenuto et Reutenauer, 2009). Ainsi, on obtient par le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \left( st_g \left( (\omega(t))^{\text{compl}} \right) \right)^{-1} &= (\omega_{0,n} \circ \gamma_\lambda \circ st_g(\omega(t)))^{-1} \\ &= (\omega_{0,n} \circ st_d(\omega(t)))^{-1} \\ &= \left( (st_d(\omega(t)))^{-1} \right)^* . \end{aligned}$$

□

On peut remarquer que

$$st_d(w) = (st_g(w^*))^* .$$

En effet, par le lemme 3.3 dans (Malvenuto et Reuteunauer, 2009), on a

$$st_g(w^*) = \gamma_\lambda \circ st_g(w) \circ \omega_{0,n} .$$

Comme pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma^* = \sigma \circ \omega_{0,n}$ , alors

$$\begin{aligned} (st_g(w^*))^* &= st_g(w^*) \circ \omega_{0,n} \\ &= (\gamma_\lambda \circ st_g(w) \circ \omega_{0,n}) \circ \omega_{0,n} \\ &= \gamma_\lambda \circ st_g(w) \\ &= st_d(w) . \end{aligned}$$

Maintenant, on va montrer la proposition suivante :

**Proposition 5** *Soit  $g$  un tableau gauche standard de forme  $\lambda/\mu$  tel que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell) \vdash m$ . Alors*

$$row(g) = (st_g(\omega_g(g)))^{-1}$$

et

$$read(g) = \left( (st_d(\omega_g(g)))^{-1} \right)^* .$$

Notons que n'importe quel mot de  $\mathbb{P}^*$  peut être le suffixe d'un mot de Yamanouchi. Ce résultat est donné par le lemme suivant qu'on va utiliser pour montrer la proposition 5 précédente.

**Lemme 4** *Pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$ , il existe  $v \in \mathbb{P}^*$  tel que  $u = vw \in \mathcal{Y}$ .*

Notons que  $u \in \mathcal{Y}$  implique que  $v \in \mathcal{Y}$  car  $v$  est un préfixe de  $u$ .

### Preuve

On procède par récurrence sur la longueur  $|w|$  de  $w$ .

Si  $|w| = 1$ , alors  $w = k$  pour un certain  $k \geq 1$ . Dans ce cas, on prend  $v = 12 \cdots (k-1)$ .

Supposons que cette propriété est vraie pour tout mot  $w$  de longueur  $n$  où  $n \geq 1$  et montrons qu'elle est vraie pour  $w$  un mot de longueur  $n+1$ . Posons  $w = x_1 \cdots x_n x_{n+1} = w_1 x_{n+1}$  où  $w_1 = x_1 \cdots x_n$ . Par l'hypothèse de récurrence, il existe  $v_1 \in \mathbb{P}^*$  tel que  $v_1 w_1 \in \mathcal{Y}$ . Supposons que  $|v_1 w_1 x_{n+1}|_{x_{n+1}} = \ell$ . Soit  $v_2$  le mot suivant

$$v_2 = \underbrace{1 \cdots 1}_{\ell} \underbrace{2 \cdots 2}_{\ell} \cdots \underbrace{(x_{n+1} - 1) \cdots (x_{n+1} - 1)}_{\ell}$$

tel que

$$|v_2|_1 = \ell + x_{n+1} - 1, |v_2|_2 = \ell + x_{n+1} - 2, \dots, |v_2|_{x_{n+1}-2} = \ell + 2, |v_2|_{x_{n+1}-1} = \ell + 1.$$

Il est clair que  $v_2 v_1 w_1 x_{n+1} = v_2 v_1 w$  est un mot de Yamanouchi.

□

Dans la preuve du lemme précédent, on peut prendre  $v_3$  le mot suivant

$$v_3 = \underbrace{1 \cdots 1}_{\ell} \underbrace{2 \cdots 2}_{\ell} \cdots \underbrace{(x_{n+1} - 1) \cdots (x_{n+1} - 1)}_{\ell}$$

tel que

$$|v_3|_1 = \ell + x_{n+1}, |v_3|_2 = \ell + x_{n+1} - 1, \dots, |v_3|_{x_{n+1}-2} = \ell + 3, |v_3|_{x_{n+1}-1} = \ell + 2.$$

On obtient que  $v_3 v_1 w_1 x_{n+1} = v_3 v_1 w$  est un mot de Yamanouchi. On peut aussi prendre  $v_4 = 1v_2$  et  $v_4 v_1 w_1 x_{n+1} = v_4 v_1 w$  sera aussi un mot de Yamanouchi. Ainsi, dans le lemme précédent, le mot de Yamanouchi  $v$  n'est pas unique.

**Lemme 5** Soit  $\sigma = x_1 x_2 \cdots x_n \in S_n$ . Supposons que  $\sigma = w_k w_{k-1} \cdots w_1$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq k : |w_i| = c_i$ . Posons  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  et  $\tau = w_1 w_2 \cdots w_k$ . Alors

$$\sigma = \tau \circ \gamma_c^*.$$

où  $\gamma_c$  est l'unique permutation de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $S_c$ .

### Preuve

Montrons que pour tout  $1 \leq i \leq n : \sigma(i) = (\tau \circ \gamma_c^*)(i)$ . En effet, supposons que  $\sigma(i) = j$  et montrons que  $(\tau \circ \gamma_c^*)(i) = j$ . On a :

$$\begin{aligned} (\tau \circ \gamma_c^*)(i) &= (\tau \circ \gamma_c \circ \omega_{0,n})(i) \\ &= (\tau \circ \gamma_c)(n+1-i). \end{aligned}$$

On peut distinguer les deux cas suivants :

- si  $1 \leq n+1-i \leq c_1$ , alors  $c_k + c_{k-1} + \dots + c_2 + 1 \leq i \leq n$ . Ce qui implique que  $j$  est une lettre de  $w_1$  et que  $\tau(c_1 - (n+1-i) + 1) = j$  car  $\tau$  commence par  $w_1$  et  $|w_1| = c_1$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned} (\tau \circ \gamma_c^*)(i) &= \tau(\gamma_c(n+1-i)) \\ &= \tau(c_1 - (n+1-i) + 1) \\ &= j. \end{aligned}$$

- si  $c_1 + \dots + c_{\ell-1} + 1 \leq n+1-i \leq c_1 + \dots + c_\ell$  pour un certain  $\ell$  tel que  $2 \leq \ell \leq k$ , alors  $c_k + \dots + c_{\ell+1} + 1 \leq i \leq c_k + \dots + c_\ell$ . Ce qui implique que  $j$  est une lettre de  $w_\ell$  et que

$$\tau((c_1 + \dots + c_{\ell-1}) + [c_\ell - [(n+1-i) - (c_1 + \dots + c_{\ell-1})] + 1]) = j,$$

c'est-à-dire

$$\tau(c_1 + \dots + c_{\ell-1} - (c_\ell + \dots + c_k) + i + c_\ell) = j.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
(\tau \circ \gamma_c^*)(i) &= \tau(\gamma_c(n+1-i)) \\
&= \tau(c_1 + \dots + c_{\ell-1} + c_\ell - [(n+1-i) - (c_1 + \dots + c_{\ell-1})] + 1) \\
&= \tau(c_1 + \dots + c_{\ell-1} - (c_\ell + \dots + c_k) + i + c_\ell) \\
&= j.
\end{aligned}$$

□

De ce lemme, on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 1** *Soit  $t$  un tableau de Young standard de forme  $\lambda \vdash n$ , alors*

$$\text{read}(t) = \text{row}(t) \circ \gamma_\lambda^* = \text{row}(t) \circ \gamma_\lambda \circ \omega_{0,n}.$$

*Soit  $g$  un tableau gauche standard à  $n$  éléments ayant  $k$  lignes non vides. Supposons que la  $i$ -ème ligne de  $g$  a une longueur  $c_i$ . Posons  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ . Alors*

$$\text{read}(g) = \text{row}(g) \circ \gamma_c^* = \text{row}(g) \circ \gamma_c \circ \omega_{0,n}.$$

Pour donner la preuve de la proposition 5 précédente, nous nous inspirons de la preuve du lemme 3.3 dans (Malvenuto et Reutenauer, 2009). À la fin de ce chapitre, on donnera une autre preuve géométrique.

### Preuve

Posons  $\omega_g(g) = w$ . Si  $w \in \mathcal{Y}$ , alors  $g$  est un tableau de Young standard et la preuve est incluse dans le lemme 3.3 dans (Malvenuto et Reutenauer, 2009).

Si  $w \notin \mathcal{Y}$ , par le lemme 3 précédent, il existe  $v \in \mathcal{Y}_{m,\mu}$  tel que  $u = vw \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}$  pour certains entiers  $m$  et  $n$  tels que  $m \leq n$  et  $|w| = n - m$ . Soient  $t$  et  $S$  deux tableaux de Young standards tels que  $\omega(t) = u$  et  $\omega(S) = v$ . Comme  $u = vw$ , alors  $\omega(t) = \omega(S)\omega_g(g)$ . Ce qui implique que

$$t = S \cup g \text{ et } g = st(t| [m+1, n]).$$



Soient  $L_1^u, \dots, L_k^u$  les ensembles d'éléments des lignes successives de  $t$  de cardinalités  $|u|_1, \dots, |u|_k$  et soient  $L_1^v, \dots, L_\ell^v$  les ensembles d'éléments des lignes successives de  $S$  de cardinalités  $|v|_1, \dots, |v|_\ell$  où  $\ell \leq k$  et pour tout  $i \in [\ell] : L_i^v \subseteq L_i^u$ . Posons pour tout  $i \in [k]$

$$L_i^w = L_i^u / L_i^v \text{ (la différence entre deux ensembles).}$$

On peut remarquer qu'un ensemble  $L_i^w$  peut être vide et que les ensembles  $L_i^w$  non vides sont les ensembles d'éléments des lignes successives de  $t| [m+1, n]$  (lorsqu'un certain  $L_i^w$  est vide, on va dire que la  $i$ -ème ligne de  $t| [m+1, n]$  est vide et donc  $t| [m+1, n]$  à  $k$  lignes en incluant les lignes vides).

On va montrer que

$$st_g(\text{row}(t| [m+1, n])) = \text{row}(g) = (st_g(w))^{-1} = (st_g(\omega_g(g)))^{-1}.$$

Remarquons que les éléments de  $t| [m+1, n]$  sont les éléments de l'ensemble  $\{m+1, \dots, n\}$  et que la  $p$ -ème lettre de  $w$  est  $j$  si et seulement si  $p+m \in L_j^w$  où  $L_j^w$  dénote la  $j$ -ème ligne de  $t| [m+1, n]$ . Remarquons aussi que  $\text{row}(t| [m+1, n])$  est une permutation de l'ensemble  $\{m+1, \dots, n\}$ . En soustrayant  $m$  à chaque élément de  $t| [m+1, n]$ , on obtient le tableau gauche standard  $g$  tel que

$$st_g(\text{row}(t| [m+1, n])) = \text{row}(g).$$

Ainsi,  $\text{row}(g)$  est une permutation de l'ensemble  $[n-m]$  et la  $p$ -ème lettre de  $w$  est  $j$  si et seulement si  $p \in (L')_j^w$  où  $(L')_j^w$  dénote la  $j$ -ème ligne de  $g$ . On peut remarquer aussi qu'en soustrayant  $m$  à chaque élément de  $L_j^w$ , on obtient  $(L')_j^w$ .

Si  $I, L$  sont deux sous ensembles de  $\mathbb{P}$  ayant la même cardinalité, on dénote par  $I \nearrow L$  l'unique bijection croissante de  $I$  vers  $L$ . Supposons que  $f_1, \dots, f_k$  sont des fonctions ayant des domaines deux à deux disjoints, alors on dénote par  $f_1 \cup \dots \cup f_k$  la fonction qui est égale à  $f_i$  une fois restreinte au domaine de  $f_i$  et qui vérifie

$$\text{Dom}(f_1 \cup \dots \cup f_k) = \text{Dom}(f_1) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_k).$$

Il est clair que

$$\text{row}(g) = \cup_{j=1, \dots, k} I_j^{g'} \nearrow (L')_j^w$$

où  $I_1^{g'}, \dots, I_k^{g'}$  sont les intervalles successifs de  $[n - m]$  de cardinalités  $|(L')_1^w|, \dots, |(L')_k^w|$  (notons que  $|(L')_1^w| + \dots + |(L')_k^w| = n - m$ ) et que

$$(\text{row}(g))^{-1} = \cup_{j=1, \dots, k} (L')_j^w \nearrow I_j^{g'}.$$

Comme la  $p$ -ème lettre de  $w$  est  $j$  si et seulement si  $p \in (L')_j^w$  et comme  $st_g(w)$  est obtenu comme mot en étiquetant les lettres égales à 1 dans  $w$  respectivement par  $1, \dots, |(L')_1^w|$  de gauche à droite ensuite les lettres égales à 2 respectivement par  $|(L')_1^w| + 1, \dots, |(L')_1^w| + |(L')_2^w|$  de gauche à droite et ainsi de suite pour les autres lettres, alors

$$\begin{aligned} st_g(w) &= \cup_{j=1, \dots, k} (L')_j^w \nearrow I_j^{g'} \\ &= (\text{row}(g))^{-1} \\ &= (st_g(\text{row}(t|[m+1, n])))^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$st_g(\text{row}(t|[m+1, n])) = \text{row}(g) = (st_g(w))^{-1} = (st_g(\omega_g(g)))^{-1}.$$

Maintenant, nous allons montrer que

$$st_d(\text{read}(t|[m+1, n])) = \text{read}(g) = \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* = \left( (st_d(\omega_g(g)))^{-1} \right)^*.$$

Soit  $c$  une composition de l'entier  $n - m$  obtenue de la suite  $(|(L')_1^w|, \dots, |(L')_k^w|)$  en supprimant tous les termes nuls. Par le corollaire 1 précédent, on a :

$$\begin{aligned} st_d(\text{read}(t|[m+1, n])) &= \text{read}(g) \\ &= \text{row}(g) \circ (\gamma_c \circ \omega_{0, n-m}) \\ &= (st_g(w))^{-1} \circ \gamma_c \circ \omega_{0, n-m} \end{aligned}$$

où  $\gamma_c$  est l'unique permutation de longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_c$ .

Puisque  $\gamma_c$  et  $\omega_{0, n-m}$  sont des involutions et puisque  $st_g(w^*) = \gamma_c \circ st_g(w) \circ \omega_{0, n-m}$  et

$\omega_{0,n-m} \circ st_g(w^*) \circ \omega_{0,n-m} = \left( \left( (st_g(w^*))^* \right)^{-1} \right)^*$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 st_d(\text{read}(t|[m+1, n])) &= (st_g(w))^{-1} \circ \gamma_c \circ \omega_{0,n-m} \\
 &= (\omega_{0,n-m} \circ (\gamma_c \circ st_g(w) \circ \omega_{0,n-m}) \circ \omega_{0,n-m})^{-1} \\
 &= (\omega_{0,n-m} \circ st_g(w^*) \circ \omega_{0,n-m})^{-1} \\
 &= \left( \left( (st_g(w^*))^* \right)^{-1} \right)^*.
 \end{aligned}$$

Comme  $st_d(w) = (st_g(w^*))^*$ , alors

$$\begin{aligned}
 st_d(\text{read}(t|[m+1, n])) &= \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* \\
 &= \left( (st_d(\omega_g(g)))^{-1} \right)^*.
 \end{aligned}$$

□

Par exemple, pour  $w = 1234143215$ . Prenons  $v = 121312$  et  $u = vw = 1213121234143215 \in$

$\mathcal{Y}_{16,(6,4,3,2,1)}$ . Alors

$$t = \omega^{-1}(u) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 16 & & & & & \\ \hline 10 & 12 & & & & \\ \hline 4 & 9 & 13 & & & \\ \hline 2 & 6 & 8 & 14 & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 \\ \hline \end{array}$$

On a

$$t|[7, 16] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 16 & & & & & \\ \hline 10 & 12 & & & & \\ \hline & 9 & 13 & & & \\ \hline & & 8 & 14 & & \\ \hline & & & 7 & 11 & 15 \\ \hline \end{array} \quad \text{et } g = st(t|[7, 16]) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 10 & & & & & \\ \hline 4 & 6 & & & & \\ \hline & 3 & 7 & & & \\ \hline & & 2 & 8 & & \\ \hline & & & 1 & 5 & 9 \\ \hline \end{array}.$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned}
 st_d(\text{read}(t|[7, 16])) &= st_d(16 \ 10 \ 12 \ 9 \ 13 \ 8 \ 14 \ 7 \ 11 \ 15) \\
 &= 10 \ 4 \ 6 \ 3 \ 7 \ 2 \ 8 \ 1 \ 5 \ 9 \\
 &= \text{read}(g)
 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* &= (9 \ 5 \ 1 \ 8 \ 2 \ 7 \ 3 \ 6 \ 4 \ 10)^* \\ &= 10 \ 4 \ 6 \ 3 \ 7 \ 2 \ 8 \ 1 \ 5 \ 9. \end{aligned}$$

On peut aussi vérifier que

$$\begin{aligned} st_g(\text{row}(T|[7, 16])) &= st_g(7 \ 11 \ 15 \ 8 \ 14 \ 9 \ 13 \ 10 \ 12 \ 16) \\ &= 1 \ 5 \ 9 \ 2 \ 8 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 10 \\ &= \text{row}(g) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} (st_g(w))^{-1} &= (1 \ 4 \ 6 \ 8 \ 2 \ 9 \ 7 \ 5 \ 3 \ 10)^{-1} \\ &= 1 \ 5 \ 9 \ 2 \ 8 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 10. \end{aligned}$$

De la proposition 5 précédente, on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 2** *Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Alors pour tout  $1 \leq k \leq |w| - 1$ , on a :*

$$(st_g(w))^{-1}|_{[k]} = (st_g(\text{préf}_k(w)))^{-1} \quad (2.1)$$

et

$$st_d\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1, \dots, |w|\}}\right) = (st_d(\text{suff}_{|w|-k}(w)))^{-1}. \quad (2.2)$$

### Preuve

Pour  $w \in \mathcal{Y}$ . On sait que  $w = \omega(t)$  où  $t$  est un tableau de Young standard et que  $\text{row}(t) = (st_g(w))^{-1}$  et que  $\text{read}(t) = \left((st_d(w))^{-1}\right)^*$  (Malvenuto et Reutenauer, 2009).

De plus, par la proposition 5 précédente, on a

$$\text{row}(t|[k]) = (st_g(\text{préf}_k(w)))^{-1} \text{ et } st_d(\text{read}(t|[k+1, |w|])) = \left((st_d(\text{suff}_{|w|-k}(w)))^{-1}\right)^*$$

car  $\omega(t|[k]) = \text{préf}_k(w)$  et  $\omega_g(t|[k+1, |w|]) = \text{suff}_{|w|-k}(w)$ . Il est clair aussi que

$$(\text{row}(t))|_{[k]} = \text{row}(t|[k]) \text{ et } (\text{read}(t))|_{[k+1, |w|]} = \text{read}(t|[k+1, |w|])$$

ce qui implique que

$$(st_g(w))^{-1}|_{[k]} = (st_g(pref_k(w)))^{-1}$$

et

$$st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)|_{[k+1,|w|]}\right) = \left((st_d(suff_{|w|-k}(w)))^{-1}\right)^*.$$

Pour conclure la preuve de ce cas, il suffit de montrer que

$$\left(st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)\right)^* = st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)^*.$$

En effet, comme  $\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}} = \left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)^*$  et pour tout mot  $u$ ,  $(st_d(u^*))^* = st_g(u)$ , alors

$$\begin{aligned} \left(st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)\right)^* &= \left(st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)^*\right)\right)^* \\ &= st_g\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)\right) \\ &= st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)\right). \end{aligned}$$

Par exemple, pour  $w = 121312 \in \mathcal{Y}_{6,(3,2,1)}$  et  $k = 3$ , on a

$$(st_g(w))^{-1}|_{[k]} = (st_g(121312))^{-1}|_{[3]} = 132$$

et

$$(st_g(pref_k(w)))^{-1} = (st_g(pref_3(w)))^{-1} = 132.$$

On a aussi

$$st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)|_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right)\right) = st_d\left(\left((352614)^{-1}\right)|_{\{4,\dots,6\}}\right) = 231$$

et

$$(st_d(suff_{|w|-k}(w)))^{-1} = (st_d(suff_3(w)))^{-1} = 231.$$

Notons qu'on peut obtenir l'identité (2.1) donnée ci-haut pour le cas particulier  $w \in \mathcal{S}_n$  à partir de l'identité 3.6 dans (Malvenuto et Reutenauer, 1995). En effet, on a :

$$w^{-1}|_{[k]} = (st_g(pref_k(w)))^{-1}$$

et il suffit de remarquer que  $st_g(w) = w$ . Par exemple, pour  $w = 52413 \in \mathcal{S}_5$  et  $k = 4$ , on a

$$w^{-1}|_{[4]} = (42531)|_{[4]} = 4231 \text{ et } (st_g(pref_4(w)))^{-1} = (st_g(5241))^{-1} = 4231.$$

Pour  $w \notin \mathcal{Y}$ . On peut procéder par la même méthode utilisée dans la preuve de la proposition 5 précédente pour montrer que  $w = \omega_g(g)$  où  $g$  est un tableau gauche standard et  $|w| = n - m$ . Comme  $1 \leq k \leq |w| - 1$ , alors soit  $g'$  le tableau gauche standard obtenu de  $g$  par restriction au cases occupées par les éléments de  $[k]$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \left( (st_g(w))^{-1} \right) |_{[k]} &= (\text{row}(g)) |_{[k]} \\ &= \text{row}(g') \\ &= (st_g(pref_k(w)))^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$ , on a

$$\left( (st_g(w))^{-1} \right) |_{[k]} = (st_g(pref_k(w)))^{-1}.$$

Pour montrer (2.2), soit  $g_1$  le tableau gauche standard obtenu de  $g$  par restriction au cases occupées par les éléments de l'ensemble  $\{k+1, \dots, n-m\}$ , alors on a

$$\begin{aligned} (\text{read}(g)) |_{\{k+1, \dots, n-m\}} &= \left( \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* \right) |_{\{k+1, \dots, n-m\}} \\ &= \text{read}(g_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} st_d(\text{read}(g_1)) &= \left( (st_d(\omega_g(g_1)))^{-1} \right)^* \\ &= \left( (st_d(suff_{n-m-k}(w)))^{-1} \right)^*. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de montrer que

$$\left( st_d \left( \left( (st_d(w))^{-1} \right) |_{\{k+1, \dots, n-m\}} \right) \right)^* = st_d \left( \left( \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* \right) |_{\{k+1, \dots, n-m\}} \right).$$

En effet, comme  $\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}} = \left(\left((st_d(w))^{-1}\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}}\right)^*$  et pour tout mot  $u$ ,  $(st_d(u^*))^* = st_g(u)$ , alors

$$\begin{aligned} \left(st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}}\right)\right)^* &= \left(st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}}\right)^*\right)\right)^* \\ &= st_g\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}}\right)\right) \\ &= st_d\left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)_{\{k+1,\dots,n-m\}}\right)\right). \end{aligned}$$

□

Par exemple, pour  $w = 1234143215$  donné ci-haut. On peut vérifier pour  $k = 6$  que

$$\begin{aligned} (st_g(w))^{-1}|_{[6]} &= (1\ 4\ 6\ 8\ 2\ 9\ 7\ 5\ 3\ 10)^{-1}|_{[6]} \\ &= (1\ 5\ 9\ 2\ 8\ 3\ 7\ 4\ 6\ 10)|_{[6]} \\ &= 152346 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} (st_g(\text{préf}_k(w)))^{-1} &= (st_g(\text{préf}_6(w)))^{-1} \\ &= (st_g(123414))^{-1} \\ &= 152346. \end{aligned}$$

On peut vérifier aussi que

$$\begin{aligned} st_d\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)_{\{k+1,\dots,|w|\}}\right) &= st_d\left(\left((3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 8\ 6\ 4\ 1\ 10)^{-1}\right)_{\{6+1,\dots,10\}}\right) \\ &= st_d\left(\left((9\ 5\ 1\ 8\ 2\ 7\ 3\ 6\ 4\ 10)\right)_{\{6+1,\dots,10\}}\right) \\ &= 3214 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} (st_d(\text{suff}_{|w|-k}(w)))^{-1} &= (st_d(\text{suff}_4(w)))^{-1} \\ &= (st_d(3215))^{-1} \\ &= 3214. \end{aligned}$$

### 2.3 Les standardisations à gauche et à droite vues à travers les arrangements de M. A. A. van Leeuwen et à travers les tableaux gauches standards

Van Leeuwen a étendu la bijection, donnée à la proposition 2 précédente, entre les mots de Yamanouchi et les tableaux de Young standards à une bijection entre les mots et les arrangements. À un mot  $w \in \mathbb{P}^n$ , il a associé un arrangement qu'on note par  $\mathbf{a}_w$ . On obtient  $\mathbf{a}_w$  à partir de  $w$  en arrangeant les entiers  $1, \dots, n$  dans des lignes numérotées  $1, 2, \dots$ , selon la règle suivante : si la  $k$ -ème lettre de  $w$  est la lettre  $i$  avec  $|\text{préf}_k(w)|_i = j$ , alors la case située dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $\mathbf{a}_w$  sera occupée par l'entier  $k$ . Ci-dessous quelques exemples d'arrangements

$$\mathbf{a}_{36152522} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \cdot & & \\ \hline 1 & & \\ \hline 5 & 7 & 8 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \mathbf{a}_{53214} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \text{ et } \mathbf{a}_{121312} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

On a mis des points dans quelques cases de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  pour indiquer que ces cases sont vides.

On peut remarquer que c'est facile d'obtenir  $w$  à partir de  $\mathbf{a}_w$ . En effet, si la case située dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $\mathbf{a}_w$  est occupée par l'entier  $k$ , alors la  $k$ -ème lettre de  $w$  est  $i$ .

On peut remarquer aussi que si  $w$  est un mot de Yamanouchi, alors  $\mathbf{a}_w$  est un tableau de Young standard tel que  $\mathbf{a}_w = \omega^{-1}(w)$  comme on peut le constater dans l'exemple donné ci-haut avec  $w = 121312$ .

En construisant un arrangement de cette manière on constate qu'une ligne peut être vide et si elle est non vide, alors elle est strictement croissante de gauche à droite. De



plus, si une case dans une ligne est non vide alors la case située à sa gauche dans la même ligne est aussi non vide. Ce qui implique qu'on ne peut pas trouver une case vide au milieu d'une ligne non vide. Pour les colonnes, il n'y a pas nécessairement une croissance et on peut trouver une case vide au milieu d'une colonne non vide comme dans l'exemple ci-dessus.

Dans le cas particulier où  $w \in \mathcal{S}_n$ , l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  est constitué de lignes non vides consécutives de longueur 1. En lisant les lettres dans  $\mathbf{a}_w$  de la première ligne jusqu'à la dernière ligne, on obtient  $w^{-1}$  comme on peut le vérifier dans l'exemple donné ci-haut avec  $w = 53214$  et  $w^{-1} = 43251$ .

Les standardisations à gauche et à droite peuvent être vues à travers les arrangements de van Leeuwen. On commence par la standardisation à droite. En effet, soit  $w \in \mathbb{P}^n$  et soit  $\mathbf{a}_w$  l'arrangement associé à  $w$ . On prend les lignes non vides de  $\mathbf{a}_w$  empilées de la première ligne située en bas jusqu'à la dernière ligne située en haut. Ensuite chaque ligne subira une rotation dont le centre est le centre du carré  $1 \times 1$  représentant sa première case et dont l'angle est  $-90^\circ$ . On peut remarquer que chaque ligne change sa position horizontale en une position verticale une fois une telle rotation est appliquée. Par exemple, si on applique une telle rotation à la ligne suivante : 

3	6
---	---

, elle devient 

3
6

. On laisse les lignes dans leurs positions verticales dans le même ordre du bas vers le haut et on les concatène pour obtenir une seule colonne qu'on peut considérer comme un arrangement constitué de lignes non vides consécutives de longueur 1. L'arrangement obtenu est exactement l'arrangement  $\mathbf{a}_{st_d(w)}$  associé à la permutation  $st_d(w)$  par la correspondance de M. A. A. van Leeuwen.

Pour la standardisation à gauche, on suit les mêmes étapes que la standardisation à droite sauf que l'angle de la rotation devient  $+90^\circ$ . Par exemple, si on applique une telle rotation à la ligne suivante : 

3	6
---	---

, elle devient 

6
3

.

Voici un exemple où toutes les étapes d'obtention de l'arrangement  $\mathbf{a}_{st_d(w)}$  et de l'ar-

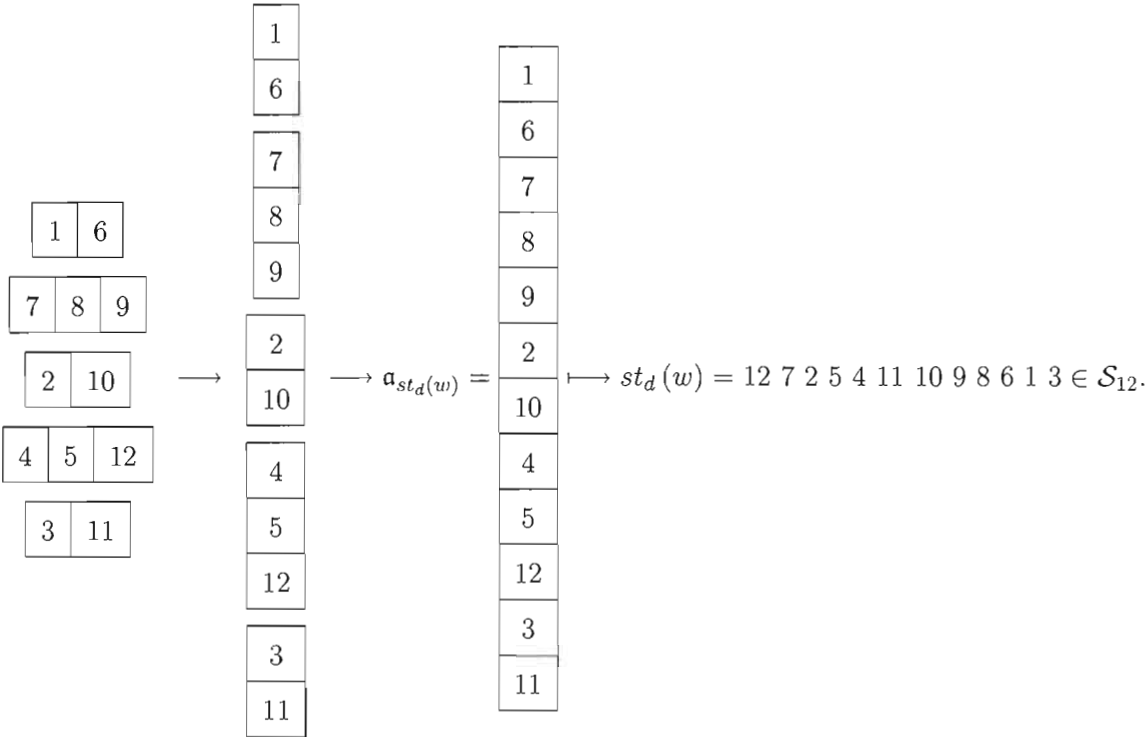
rangement  $\mathfrak{a}_{st_g(w)}$  à partir de  $\mathfrak{a}_w$  sont illustrées.

Pour  $w = 631226555312$ , on a

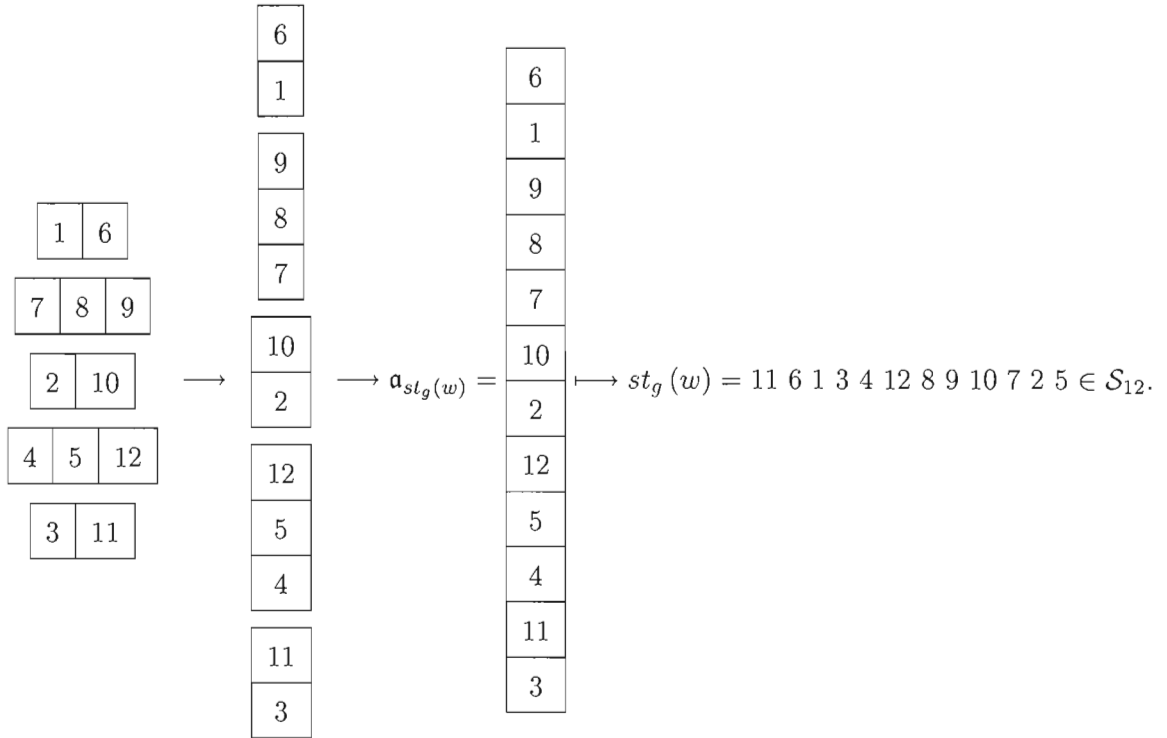
$\mathfrak{a}_w =$ 

1	6	
7	8	9
.	.	
2	10	
4	5	12
3	11	

On a :



Et on a :



Les standardisations à gauche et à droite peuvent aussi être vues à travers les tableaux gauches standards. On commence par la standardisation à droite. En effet, soit  $w \in \mathbb{P}^n$  et soit  $g_w$  un tableau gauche standard associé à  $w$ , c'est-à-dire  $\omega_g(g_w) = w$ . On peut obtenir un tel tableau  $g_w$  de plusieurs manières. En effet, par le lemme 3 il existe  $v \in \mathcal{Y}$  tel que  $u = vw \in \mathcal{Y}$  et il suffit de poser  $g_w = st(\omega^{-1}(u) \mid [|v| + 1, |u|])$ . On prend les lignes non vides de  $g_w$  empilées de la première ligne située en bas jusqu'à la dernière ligne située en haut. Ensuite chaque ligne changera sa position horizontale en une position oblique avec un angle de  $-45^\circ$ . Plus précisément, les centres des carrés  $1 \times 1$  représentant les cases de cette ligne subiront une rotation dont le centre est le centre du carré  $1 \times 1$  représentant sa première case et dont l'angle est  $-45^\circ$ . Par exemple, si

on applique une telle rotation à la ligne suivante : 

3	6	8
---	---	---

 . Elle devient 

3
6
8

 .

On laisse les lignes dans leurs positions obliques dans le même ordre du bas vers le haut et on les concatène pour obtenir une ligne oblique qu'on peut voir comme un tableau

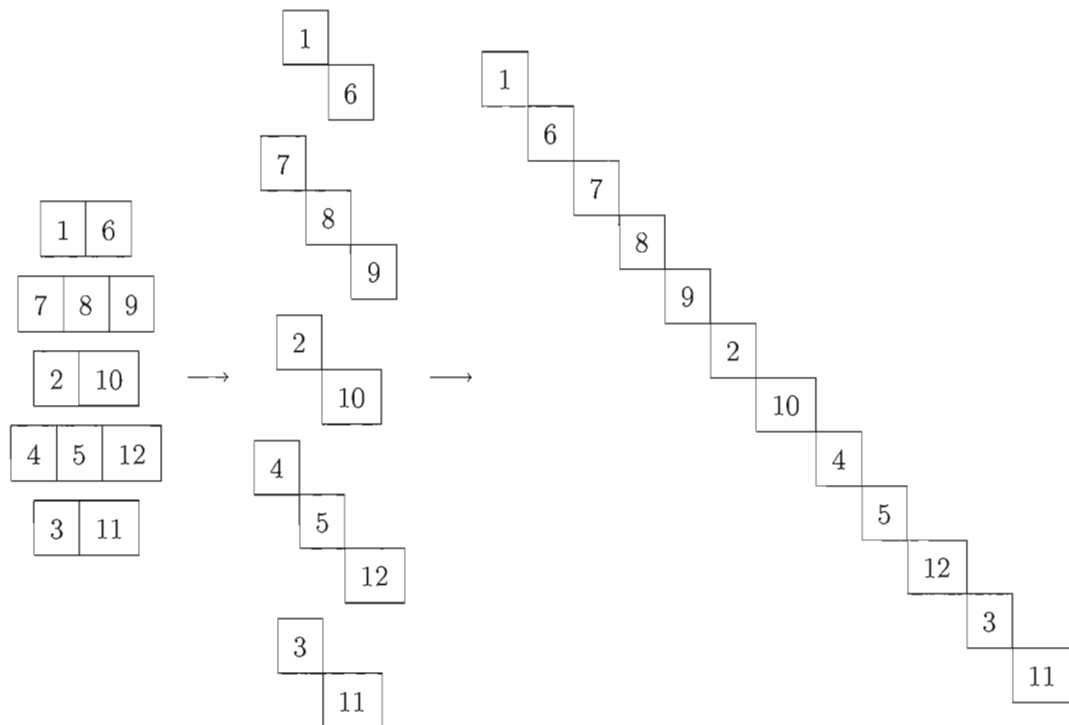
gauche standard constitué de lignes non vides de longueur 1 et de colonnes non vides de longueur 1. Le tableau gauche standard obtenu peut être associé à la permutation  $st_d(w)$ , c'est-à-dire  $\omega_g$  envoie ce tableau sur  $st_d(w)$ . Notons que ce tableau gauche standard, qu'on note par  $g_{st_d(w)}$ , ne dépend pas de  $g$ . En effet, si on identifie  $w$  à un autre tableau gauche standard  $g'$ , alors  $g$  et  $g'$  auront les mêmes lignes non vides et donc le tableau obtenu est toujours le même. Voici un exemple où toutes les étapes d'obtention de ce tableau gauche standard sont illustrées.

Pour  $w = 631226555312$  donné ci-haut, on a

$$g_w = \begin{array}{ccccccc} \boxed{1} & \boxed{6} & & & & & \\ & & \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \boxed{2} & \boxed{10} \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{12} \\ & & & & & & & \boxed{3} & \boxed{11} \end{array}$$

Pour obtenir  $g_w$ , il suffit de prendre  $v = 1111111222222333334444455$ . On a mis des points dans quelques cases du tableau gauche standard  $g_w$  pour indiquer que ces cases sont vides.

On peut obtenir le tableau gauche standard  $g_{st_d(w)}$  à partir de  $g_w$  comme suit :



Ce qui implique que  $st_d(w) = 12\ 7\ 2\ 5\ 4\ 11\ 10\ 9\ 8\ 6\ 1\ 3 \in \mathcal{S}_{12}$ .

Pour la standardisation à gauche, on suit les mêmes étapes que la standardisation à droite sauf que l'angle de la rotation devient  $+135^\circ$ . Par exemple, si on applique une

telle rotation à la ligne suivante : 

3	6	8
---	---	---

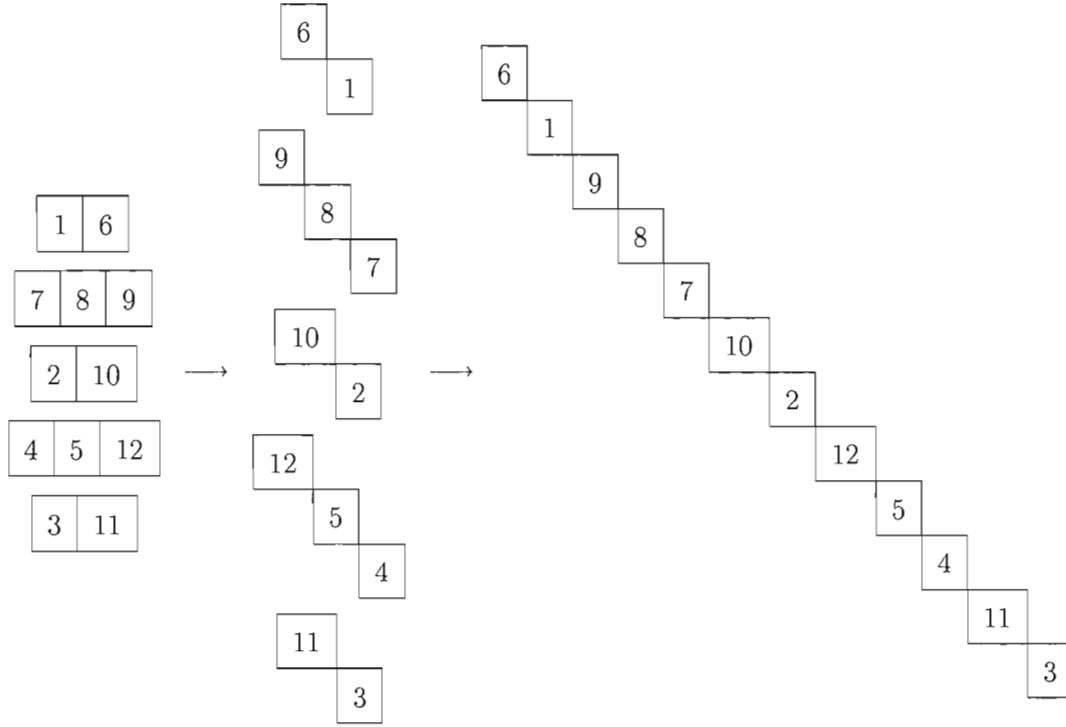
. Elle devient 

8
6
3

.

Pour  $w = 631226555312$ , on peut obtenir le tableau gauche standard  $g_{st_g(w)}$  à partir de

$g_w$  comme suit :



Ce qui implique que  $st_g(w) = 11\ 6\ 1\ 3\ 4\ 12\ 8\ 9\ 10\ 7\ 2\ 5 \in \mathcal{S}_{12}$ .

## 2.4 Preuve géométrique naturelle

Dans cette section, nous allons utiliser les interprétations géométriques précédentes, des standardisations à gauche et à droite, pour montrer d'une manière très naturelle tous les résultats de ce chapitre et pour montrer que pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$

$$(st_g(w))^{-1} = \left( (st_d(w^{\text{compl}}))^{-1} \right)^* = \left( (st_d(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}}$$

et

$$\left( (st_d(w))^{-1} \right)^* = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} = \left( \left( (st_g(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^*.$$

On peut associer à chaque arrangement  $\mathbf{a}_w$  deux mots qu'on note par  $\text{read}(\mathbf{a}_w)$  et  $\text{row}(\mathbf{a}_w)$  de la même manière utilisée avec les tableaux de Young standards et les tableaux gauches standards. Par exemple, pour l'arrangement  $\mathbf{a}_w$ , associé au mot  $w =$

631226555312, donné ci-haut, on a :

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = 1\ 6\ 7\ 8\ 9\ 2\ 10\ 4\ 5\ 12\ 3\ 11 \text{ et } \text{row}(\mathbf{a}_w) = 3\ 11\ 4\ 5\ 12\ 2\ 10\ 7\ 8\ 9\ 1\ 6.$$

On peut remarquer facilement que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  :

$$\text{row}(\mathbf{a}_\sigma) = \sigma^{-1} \text{ et } \text{read}(\mathbf{a}_\sigma) = (\text{row}(\mathbf{a}_\sigma))^* = (\sigma^{-1})^*. \quad (2.3)$$

On peut remarquer aussi que

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(\mathbf{a}_{st_d(w)}) \text{ et } \text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(\mathbf{a}_{st_g(w)}). \quad (2.4)$$

On peut montrer facilement la proposition suivante

**Proposition 6** *Pour tout mot  $w$ , on a :*

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \left( (st_d(w))^{-1} \right)^*$$

et

$$\text{row}(\mathbf{a}_w) = (st_g(w))^{-1}.$$

Par exemple, pour  $w = 631226555312$ , donné ci-haut, on a :

$$\begin{aligned} (st_g(w))^{-1} &= (st_g(631226555312))^{-1} \\ &= 3\ 11\ 4\ 5\ 2\ 10\ 7\ 8\ 9\ 1\ 6 \\ &= \text{row}(\mathbf{a}_w). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* &= \left( (st_d(631226555312))^{-1} \right)^* \\ &= 1\ 6\ 7\ 8\ 9\ 2\ 10\ 4\ 5\ 12\ 3\ 11 \\ &= \text{read}(\mathbf{a}_w). \end{aligned}$$

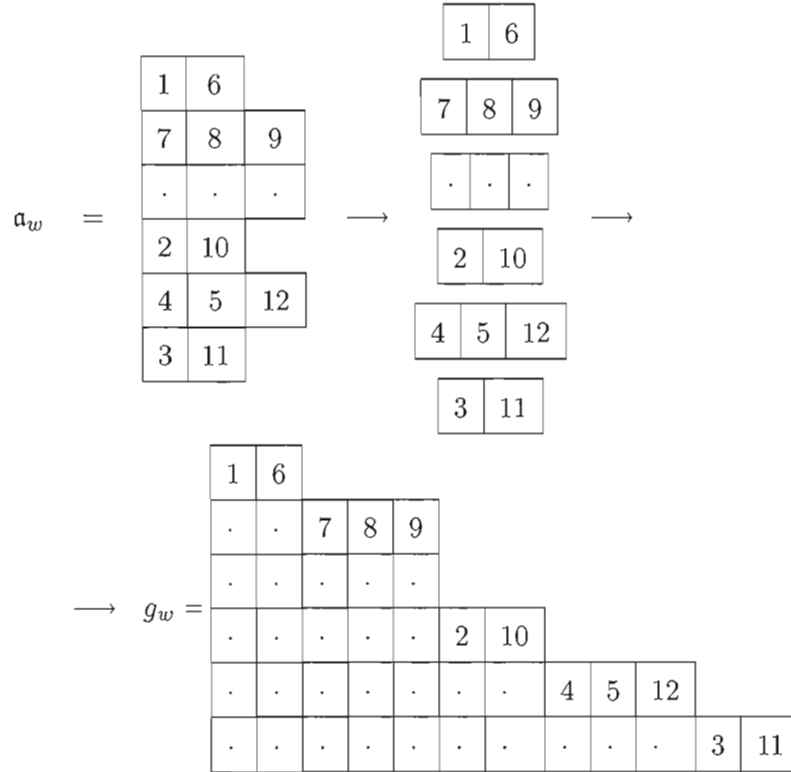
## Preuve

Pour montrer cette proposition, il suffit de transformer l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  en un tableau gauche standard qu'on note par  $g_w$  tel que

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(g_w) \text{ et } \text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(g_w) \text{ et } \omega_g(g_w) = w$$

et ensuite appliquer le résultat de la proposition 5 précédente qu'on a montré pour les tableaux gauches standards.

Ceci est possible en prenant les lignes vides et non vides de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  et en les arrangeant de sorte qu'ils forment un tableau gauche standard dont les lignes coïncident avec les lignes de  $\mathbf{a}_w$  et dont les colonnes sont non vides, consécutives et de longueur 1, comme dans l'exemple suivant :



On peut remarquer que le nombre de lignes de  $g_w$  est égal au nombre de lignes de  $\mathbf{a}_w$  incluant les lignes vides et que le nombre de colonnes de  $g_w$  est égal à la somme des longueurs des lignes non vides de  $\mathbf{a}_w$ . On peut remarquer aussi que le fait qu'on a gardé les lignes vides de  $\mathbf{a}_w$  implique que le numéro de la ligne contenant l'élément  $i$  est le même dans l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  et dans le tableau gauche standard  $g_w$ . Ainsi,

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(g_w) \text{ et } \text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(g_w) \text{ avec } \omega_g(g_w) = w$$



Par conséquent, par la proposition 5 précédente :

$$\begin{aligned}
 \text{read}(\mathbf{a}_w) &= \text{read}(g_w) \\
 &= \left( (st_d(\omega_g(g_w)))^{-1} \right)^* \\
 &= \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* \\
 &= \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{row}(\mathbf{a}_w) &= \text{row}(g_w) \\
 &= (st_g(\omega_g(g_w)))^{-1} \\
 &= (st_g(w))^{-1}.
 \end{aligned}$$

### Preuve géométrique

On peut aussi montrer cette proposition d'une autre manière en utilisant l'interprétation géométrique précédente des standardisations à droite et à gauche à travers les arrangements de van Leeuwen comme suit :

En utilisant les identités (2.3) et (2.4) précédentes et le fait que  $st_d(w)$  et  $st_g(w)$  sont des permutations, on obtient que pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$  :

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(\mathbf{a}_{st_d(w)}) = \left( (st_d(w))^{-1} \right)^*$$

et

$$\text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(\mathbf{a}_{st_g(w)}) = (st_g(w))^{-1}.$$

□

On peut donner  $\text{read}(\mathbf{a}_w)$  et  $\text{row}(\mathbf{a}_w)$  d'une autre manière équivalente comme suit

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1}$$

et

$$\text{row}(\mathbf{a}_w) = \left( \left( st_d(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} \right)^*.$$

En effet, on peut remarquer facilement que  $\mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}$  peut être obtenu de  $\mathbf{a}_w$  en lui appliquant une réflexion par rapport à la droite horizontale située entre ses deux lignes situées en son milieu lorsque le nombre de lignes de  $\mathbf{a}_w$  est pair et par rapport à la droite horizontale située au milieu de la ligne située en son milieu lorsque le nombre de lignes de  $\mathbf{a}_w$  est impair et on écrit  $\mathbf{a}_w \xleftrightarrow{\circlearrowleft} \mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}$ . Par exemple, pour  $w = 631226555312$ , on a :

$$w^{\text{compl}} = 146551222465.$$

Remarquons que

$$\mathbf{a}_w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \cdot & & \\ \hline 2 & 10 & \\ \hline 4 & 5 & 12 \\ \hline 3 & 11 & \\ \hline \end{array} \xleftrightarrow{\circlearrowleft} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 11 & \\ \hline 4 & 5 & 12 \\ \hline 2 & 10 & \\ \hline \cdot & & \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline \end{array} = \mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}.$$

Ce qui implique directement que

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(\mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}) \text{ et } \text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(\mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}).$$

Ainsi, par la proposition 6 précédente, on obtient

$$\text{read}(\mathbf{a}_w) = \text{row}(\mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}) = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1}$$

et que

$$\text{row}(\mathbf{a}_w) = \text{read}(\mathbf{a}_{w^{\text{compl}}}) = \left( \left( st_d(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} \right)^*.$$

Ainsi pour tout mot  $w$ , on a :

$$(st_g(w))^{-1} = \left( \left( st_d(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} \right)^* \text{ et } \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} st_g(w^{\text{compl}}) &= \left( \left( (st_d(w))^{-1} \right)^* \right)^{-1} \\ &= \omega_{0,n} \circ st_d(w) \end{aligned}$$

où  $\omega_{0,n}$  est la permutation ayant la longueur maximale dans  $\mathcal{S}_n$  et  $n = |w|$ . Comme  $st_d(w) = \gamma_c \circ st_g(w)$  où  $\gamma_c$  est la permutation ayant la longueur maximale dans le sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_c$  et  $c$  est la composition de l'entier  $n = |w|$  obtenue de la suite  $(|w|_1, |w|_2, \dots, |w|_k)$ , où  $k$  est la plus grande lettre de  $w$ , en supprimant tous les termes nuls (cette suite est la suite des longueurs des lignes non vides de  $\mathfrak{a}_w$  prises du bas vers le haut, par exemple pour  $w = 631226555312$  donné ci-haut, on a :  $c = (2, 3, 2, 3, 2)$ ), alors

$$st_g(w^{\text{compl}}) = \omega_{0,n} \circ st_d(w) = \omega_{0,n} \circ \gamma_c \circ st_g(w).$$

Ce résultat est donné dans (Malvenuto et Reutenauer, 2009).

Remarquons que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  :

$$(\sigma^{-1})^{\text{compl}} = (\sigma^*)^{-1}. \quad (2.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1})^{\text{compl}} &= \omega_{0,n} \circ \sigma^{-1} \\ &= \omega_{0,n}^{-1} \circ \sigma^{-1} \\ &= (\sigma \circ \omega_{0,n})^{-1} \\ &= (\sigma^*)^{-1}. \end{aligned}$$

On peut aussi montrer cette identité en utilisant les arrangements de van Leeuwen. En effet, il suffit de montrer que  $\mathfrak{a}_{(\sigma^*)^{-1}} = \mathfrak{a}_{(\sigma^{-1})}^{\text{compl}}$ . L'arrangement,  $\mathfrak{a}_{(\sigma^*)^{-1}}$  est constitué de lignes consécutives non vides de longueur 1 et le mot obtenu en lisant cet arrangement, sous forme d'une colonne, du bas vers le haut est  $\sigma^*$ . De même,  $\mathfrak{a}_{\sigma^{-1}}$  est constitué de lignes consécutives non vides de longueur 1 et le mot obtenu en lisant cet arrangement, sous forme d'une colonne, du bas vers le haut est  $\sigma$  et la lecture du haut vers le bas donne  $\sigma^*$ . Il est clair qu'on peut obtenir l'un des deux arrangements  $\mathfrak{a}_{(\sigma^*)^{-1}}$  et  $\mathfrak{a}_{\sigma^{-1}}$  à partir de l'autre en lui appliquant une réflexion par rapport à la droite horizontale située entre ses deux cases situées en son milieu lorsque le nombre de cases est pair et par rapport à la droite horizontale située au milieu de la case située en son milieu

lorsque le nombre de cases est impair, c'est-à-dire  $\mathfrak{a}_{(\sigma^*)^{-1}} \xleftrightarrow{\circ} \mathfrak{a}_{\sigma^{-1}}$ . Comme appliquer cette réflexion est équivalent à passer au complément, alors

$$(\sigma^*)^{-1} = (\sigma^{-1})^{\text{compl}} \text{ et } \left((\sigma^*)^{-1}\right)^{\text{compl}} = \sigma^{-1}.$$

Remarquons qu'en remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma^{-1}$ , on obtient :  $(\sigma^{-1})^* = (\sigma^{\text{compl}})^{-1}$ .

On peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 3** *Pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$ ,*

$$\left((st_d(w))^{-1}\right)^* = \left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^*.$$

**Preuve**

Comme  $st_g(w^*) = (st_d(w))^*$ , alors par l'identité (2.5), on a :

$$\begin{aligned} (st_g(w^*))^{-1} &= ((st_d(w))^*)^{-1} \\ &= \left((st_d(w))^{-1}\right)^{\text{compl}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour tout  $u \in \mathbb{P}^*$  :  $(u^{\text{compl}})^{\text{compl}} = u$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^* &= \left(\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^{\text{compl}}\right)^* \\ &= \left((st_d(w))^{-1}\right)^*. \end{aligned}$$

□

On peut déduire de la proposition 6 précédente que pour tout tableau de Young standard  $t$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{read}(t) &= \left(st_g\left((\omega(t))^{\text{compl}}\right)\right)^{-1} \\ &= \left((st_d(\omega(t)))^{-1}\right)^* \\ &= \left(\left((st_g((\omega(t))^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^*. \end{aligned}$$

Ce qui implique que pour tout tableau de Young standard  $t$ , on a :

$$(\text{read}(t))^* = \left( (st_g((\omega(t))^*))^{-1} \right)^{\text{compl}}.$$

Ce résultat est aussi donné dans (Malvenuto et reutenauer, 2009).

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left( \left( (st_d(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^* &= \left( \left( ((st_g(w))^*)^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^* \\ &= \left( \left( \left( (st_g(w))^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^{\text{compl}} \right)^* \\ &= \left( (st_g(w))^{-1} \right)^*. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\left( (st_d(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}} = (st_g(w))^{-1}$$

Ainsi, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 7** *Pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$  :*

$$(st_g(w))^{-1} = \left( \left( st_d(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} \right)^* = \left( (st_d(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}}$$

et

$$\left( (st_d(w))^{-1} \right)^* = \left( st_g(w^{\text{compl}}) \right)^{-1} = \left( \left( (st_g(w^*))^{-1} \right)^{\text{compl}} \right)^*.$$

Remarquons qu'on peut déduire le résultat de la proposition 5 précédente à partir de la proposition 6 précédente. En effet, soit  $g$  un tableau gauche standard. Il suffit de transformer  $g$  en un arrangement, qu'on note par  $\mathfrak{a}$ , tel que  $\text{read}(g) = \text{read}(\mathfrak{a})$  et  $\text{row}(g) = \text{row}(\mathfrak{a})$  et  $\mathfrak{a}$  est l'arrangement associé par la correspondance de van Leuwen au mot  $\omega_g(g)$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\omega_g(g)}$  et ensuite appliquer le résultat de la proposition 6 précédente qu'on a montré pour les arrangements.

Pour le faire, il suffit de déplacer les lignes non vides de  $g$  complètement vers la gauche de sorte que chaque ligne garde sa position horizontale. En d'autres mots, il suffit de

supprimer les cases vides situées au début de chaque ligne non vide ensuite déplacer cette ligne non vide complètement à gauche comme dans l'exemple suivant :

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \cdot & 4 & & & \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 7 \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline \cdot & & \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & 7 & \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} = a_{\omega_g(g)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{read}(g) &= \text{read}(a) \\ &= \text{read}(a_{\omega_g(g)}) \\ &= \left( (st_d(\omega_g(g)))^{-1} \right)^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{row}(g) &= \text{row}(a) \\ &= \text{row}(a_{\omega_g(g)}) \\ &= (st_g(\omega_g(g)))^{-1}. \end{aligned}$$

## 2.5 Paires de Yamanouchi indécomposables

Dans cette section, nous définissons une paire de Yamanouchi indécomposable, ensuite nous montrons que les paires de Yamanouchi indécomposables de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ . Par la bijection de Sillke (Chapitre 6, section 6.2), elles sont aussi en bijection avec les hypercartes pointées à  $n-1$  points. Nous posons le problème ouvert de donner cette dernière bijection explicitement sans passer par les permutations connexes. Par la bijection de Dress et Franz (Chapitre 6, section 6.2), elles sont aussi en bijection avec les sous-groupes d'indice  $n-1$  dans le groupe libre à deux générateurs.

**Définition 40** *La paire de mots  $(u, v)$  est dite de Yamanouchi de longueur  $n$  de forme  $\lambda \vdash n$  si  $u$  et  $v$  sont deux mots de Yamanouchi de longueur  $n$  de même forme  $\lambda \vdash n$ .*

On note l'ensemble de toutes les paires de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  par  $PY^\lambda$ .

On peut déduire facilement en utilisant le proposition 2 précédente que les paires de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  sont en bijection avec les paires de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$ .

On note cette bijection par  $\omega$  qui dénote aussi la bijection entre les mots de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  et les tableaux de Young standards de forme  $\lambda \vdash n$ . Ainsi, si  $(u, v)$  est une paire de mots de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$ , alors  $\omega(u, v) = (\omega(u), \omega(v))$  et si  $(P, Q)$  est une paire de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$ , alors  $\omega^{-1}(P, Q) = (\omega^{-1}(P), \omega^{-1}(Q))$ . Par exemple, la paire de Yamanouchi  $(u, v) = (1121324, 1112234)$  de longueur 7 et de forme  $(3, 2, 1, 1)$  peut être identifiée à la paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme un partage de 7 telle que

$$(P, Q) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right).$$

Remarquons que  $u = \omega(P)$  et que  $v = \omega(Q)$ .

Rappelons que  $\pi$  dénote la bijection de Schensted entre les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de tableaux de Young standards à  $n$  éléments de même forme. D'après ce qui précède et dans toute la suite de cette thèse,  $\pi$  dénotera aussi la bijection de Schensted entre les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de Yamanouchi de longueur  $n$ . À la section 4 du chapitre 3 suivant, nous donnerons un algorithme permettant de passer directement de  $\sigma \in S_n$  à  $\pi(\sigma)$  la paire de Yamanouchi de forme  $\lambda$  un partage de  $n$  sans passer par la paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda$ .

Remarquons que la concaténation  $uv$  ou  $u * v$  de deux mots de Yamanouchi  $u$  et  $v$  de forme  $\lambda \vdash n$  et  $\mu \vdash m$  respectivement est un mot de Yamanouchi de forme un partage de  $n + m$ . Cette opération de concaténation sur les mots de Yamanouchi corresponde

sur les tableaux de Young standards associés à glisser les lignes du deuxième tableau à  $m$  éléments sur les lignes du premier tableau à  $n$  éléments après avoir ajouter  $n$  à chacun de ses éléments, ce qui donne un tableau de Young standard à  $n + m$  éléments. Par exemple,

$$112 * 1213 = 1121213.$$

Les mots de Yamanouchi 112 et 1213 correspondent respectivement aux tableaux

3	
1	2

et 

4	
2	
1	3

. Le tableau 

7	
5	
4	6

 est obtenu du tableau 

4	
2	
1	3

 après avoir ajouté 3 à

chacun de ses éléments et en glissant ses lignes sur les lignes du premier tableau

3	
1	2

on obtient le tableau de Young standard 

7			
3	5		
1	2	4	6

 qui correspond au mot de

Yamanouchi 1121213.

Notons que cette opération intervient, sous sa forme tableau, dans ((Poirier et Reutenauer, 1995), page 87).

Comme la concaténation de deux mots de Yamanouchi est un mot de Yamanouchi, alors on peut définir l'opération de concaténation de deux paires de Yamanouchi comme suit :

**Définition 41** Soient  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  deux paires de mots de Yamanouchi, alors

$$(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_1 * u_2, v_1 * v_2).$$

On peut vérifier facilement que  $(u_1 * u_2, v_1 * v_2)$  est une paire de Yamanouchi.

Une paire de Yamanouchi de longueur  $n$  peut être identifiée à une paire de tableaux de Young standards de même forme un partage de  $n$  et l'opération de concaténation des paires de Yamanouchi correspond sur les paires de tableaux de Young standards



associées à glisser respectivement les lignes des tableaux de la deuxième paire de forme  $\mu \vdash m$  sur les lignes des tableaux correspondants de la première paire de forme  $\lambda \vdash n$  après avoir ajouter  $n$  à chacun des éléments des tableaux de la deuxième paire. Par exemple,

$$\begin{aligned}(112, 121) * (1213, 1231) &= (112 * 1213, 121 * 1231) \\ &= (1121213, 1211231).\end{aligned}$$

Les mots de Yamanouchi 112, 121, 1213 et 1231 correspondent respectivement aux tableaux

3		2		4		3	
1	2	1	3	2		2	
				1	3	1	4

Les tableaux 

7	
5	
4	6

 et 

6	
5	
4	7

 sont obtenus respectivement des tableaux 

4	
2	
1	3

 et

3	
2	
1	4

 en ajoutant 3 à chacun de leurs éléments et en glissant respectivement leurs

lignes sur les lignes des premiers tableaux 

3	
1	2

 et 

2	
1	3

, on obtient les tableaux de Young standards

7				6			
3	5			2	5		
1	2	4	6	1	3	4	7

qui correspondent respectivement aux mots de Yamanouchi 1121213 et 1211231.

Soient  $u$  et  $v$  deux mots de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$  et  $\mu \vdash m$  respectivement qui correspondent aux tableaux de Young standards  $P$  à  $n$  éléments et  $Q$  à  $m$  éléments. On note le tableau de Young standard à  $n + m$  éléments qui correspond au mot de Yamanouchi  $u * v$  par  $P * Q$ . Ainsi  $P * Q$  est le tableau obtenu en glissant les lignes de

$Q$  sur les lignes de  $P$  après avoir ajouter  $n$  à chacun des éléments de  $Q$ . Par exemple,

$$112 * 1213 = 1121213,$$

implique que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

On peut déduire que

$$u = \omega(P) \text{ et } v = \omega(Q),$$

implique que

$$u * v = uv = \omega(P * Q) = \omega(P) \omega(Q).$$

Par conséquent, si  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont deux paires de Yamanouchi qui correspondent respectivement aux paires de tableaux  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$ , alors la paire de Yamanouchi  $(u_1 * u_2, v_1 * v_2)$  correspond à la paire de tableaux  $(P_1 * P_2, Q_1 * Q_2)$  et on écrit

$$(P_1, Q_1) * (P_2, Q_2) = (P_1 * P_2, Q_1 * Q_2).$$

**Définition 42** Une permutation  $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$  de l'ensemble  $[n]$  écrite sous forme d'un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$  est connexe si pour tout  $p < n$  le préfixe  $a_1 a_2 \dots a_p$  possède au moins une lettre  $a_j > p$ .

En d'autres mots, une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est connexe si pour tout  $i \in [n-1] : \sigma([i]) \neq [i]$ .

Soit  $(P, Q)$  une paire de tableaux de Young standards de même forme un partage de  $n$  associée par la bijection de Schensted à une permutation non connexe  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$ . Comme  $\sigma$  n'est pas connexe alors il existe  $1 \leq i \leq n-1$  tel que  $\sigma([i]) = [i]$ , ce qui implique que les restrictions de  $\sigma$  à  $[i]$  et à  $\{i+1, \dots, n\}$  sont respectivement des permutations de  $[i]$  et de  $\{i+1, \dots, n\}$ . Ainsi  $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$  avec  $\sigma_1$  une permutation de  $[i]$  et  $\sigma_2$  une permutation de  $\{i+1, \dots, n\}$  (on peut identifier  $\sigma_2$  à une permutation de  $[n-i]$ ,

qu'on note par  $\sigma'_2$ , en soustrayant  $i$  à chacune de ses lettres). Soient  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$  des paires de tableaux de Young standards de même forme associées respectivement par la bijection de Schensted aux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma'_2$ . On peut montrer le résultat suivant :

**Proposition 8** *On a :*

$$P = P_1 * P_2 \text{ et } Q = Q_1 * Q_2.$$

Le résultat de cette proposition découle directement du processus d'insertion de la correspondance de Schensted et du fait que l'insertion des éléments 1 à  $i$  n'influence pas sur l'insertion des élément  $i + 1$  à  $n$ .

Par exemple, soit  $\sigma = 4123675$  une permutation non connexe de l'ensemble  $[7]$  qui est associée par la bijection  $\pi$  à la paire de tableaux  $\left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 6 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 7 & & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right)$ . Posons  $\sigma_1 = 4123$  (une permutation de  $[4]$ ) et  $\sigma_2 = 675$  (peut être identifiée à la permutation  $\sigma'_2 = 231$  de  $[3]$ ) qui sont associées respectivement par la bijection  $\pi$  aux paires de tableaux  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right)$  et  $\left( \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline 5 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right)$ . Remarquons que  $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$  et que

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 6 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & \\ \hline 5 & 7 \\ \hline \end{array}$$

et

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 7 & & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

D'une manière générale, comme chaque permutation est une liste ordonnée de permutations connexes, on peut déduire que :

Si  $\sigma$  est une permutation de  $[n]$  et si  $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2 * \dots * \sigma_r$  avec  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  des permutations connexes des ensembles  $[k_1], \{k_1 + 1, \dots, k_2\}, \{k_2 + 1, \dots, k_3\}, \dots$  et  $\{k_{r-1} + 1, \dots, k_r (= n)\}$ , alors en supposant que les paires de tableaux de Young standards  $(P, Q), (P_1, Q_1), \dots, (P_r, Q_r)$  sont respectivement les paires de tableaux associées par la bijection de Schensted aux

permutations  $\sigma, \sigma_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_r$  où pour tout  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$  :  $\sigma'_i$  est obtenue de  $\sigma_i$  en soustrayant  $k_{i-1}$  à chacune de ses lettres, on obtient :

$$P = P_1 * \dots * P_r \text{ et } Q = Q_1 * \dots * Q_r.$$

On peut aussi déduire que si  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$  sont deux paires de tableaux de Young standards de même forme associées respectivement par la bijection de Schensted aux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $[n]$  et  $[m]$  respectivement, alors la paire  $(P_1 * P_2, Q_1 * Q_2)$  est associée par la bijection de Schensted à la permutation  $\sigma_1 * \sigma'_2$  de  $[n + m]$  où  $\sigma'_2$  est obtenue de  $\sigma_2$  en ajoutant  $n$  à chacune de ses lettres. La preuve de ce résultat découle directement du processus de suppression de la correspondance de Schensted et du fait que la suppression des éléments 1 à  $n$  n'influence pas sur la suppression des éléments  $n + 1$  à  $n + m$ . Par exemple, avec l'exemple précédent on peut remarquer que la suppression des éléments 1 à 4 n'influence pas sur la suppression des éléments 5 à 7.

**Définition 43** Une paire  $(u, v)$  de Yamanouchi est décomposable s'ils existent deux paires de Yamanouchi  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  telles que

$$(u, v) = (u_1, v_1) * (u_2, v_2).$$

Dans le cas contraire, on dit que  $(u, v)$  est indécomposable.

Maintenant, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 9** Les paires de Yamanouchi de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de Yamanouchi indécomposables de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ .

### Preuve

La preuve est un résultat direct de la bijection  $\pi$  de Schensted entre les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme un partage de  $n$  qui sont en bijection avec les paires de Yamanouchi de même forme le même partage de  $n$ .

Montrons que si la paire de Yamanouchi  $(x, y)$  est associée par cette bijection à une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$ , alors  $(x, y)$  est indécomposable si et seulement si  $\sigma$  est connexe. En effet, d'une part si  $\sigma$  n'est pas connexe alors il existe  $1 \leq i \leq n-1$  tel que  $\sigma([i]) = [i]$ , ce qui implique que les restrictions de  $\sigma$  à  $[i]$  et à  $\{i+1, \dots, n\}$  sont respectivement des permutations de  $[i]$  et de  $\{i+1, \dots, n\}$ . Ainsi  $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$  avec  $\sigma_1$  une permutation de  $[i]$  et  $\sigma_2$  une permutation de  $\{i+1, \dots, n\}$ . Soit  $\sigma'_2$  la permutation de l'ensemble  $[n-i]$  obtenue de  $\sigma_2$  en soustrayant  $i$  à chacune de ses lettres. Soient  $(P, Q)$ ,  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$  les paires de tableaux de Young standards de même forme associées respectivement par la bijection de Schensted aux permutations  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma'_2$ . Par la proposition 8 précédente, on a :

$$P = P_1 * P_2 \text{ et } Q = Q_1 * Q_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (P, Q) &= (P_1 * P_2, Q_1 * Q_2) \\ &= (P_1, Q_1) * (P_2, Q_2). \end{aligned}$$

Comme la paire de Yamanouchi  $(x, y)$  est la paire associée à la paire de tableaux  $(P, Q)$  et comme  $(P, Q) = (P_1, Q_1) * (P_2, Q_2)$ , alors

$$(x, y) = (x_1, y_1) * (x_2, y_2),$$

où  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont les paires de Yamanouchi associées respectivement aux paires de tableaux  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$ . Ce qui donne une contradiction avec le fait que  $(x, y)$  est indécomposable.

D'autre part, si  $(x, y)$  n'est pas indécomposable, alors il existe  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  deux paires de Yamanouchi telles que

$$(x, y) = (x_1, y_1) * (x_2, y_2),$$

ce qui implique que

$$(P, Q) = (P_1, Q_1) * (P_2, Q_2) = (P_1 * P_2, Q_1 * Q_2),$$

où  $(P, Q)$ ,  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$  sont les paires de tableaux de Young standards de même forme associées respectivement aux paires de Yamanouchi  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . Supposons que  $\sigma_1$  et  $\sigma'_2$  sont deux permutations de  $[i]$  et  $[j]$  associées respectivement par la correspondance de Schensted aux paires  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$ . Posons  $\tau = \sigma_1 * \sigma_2$  où  $\sigma_2$  est obtenue de  $\sigma'_2$  en ajoutant  $i$  à chacune de ses lettres. Ainsi  $\tau$  est une permutation de  $[i + j]$ . D'après ce qui précède,  $\tau$  est la permutation associée par la correspondance de Schensted à la paire  $(P, Q)$ , ce qui implique que  $\tau = \sigma$ . Ainsi,  $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$ , ce qui donne une contradiction avec le fait que  $\sigma$  est connexe.

□

## CHAPITRE III

### YAMANOUCHISATION D'ALGORITHMES

Dans ce chapitre, nous allons élaborer des algorithmes sur les mots de Yamanouchi. Ceux-ci sont en bijection avec les tableaux de Young standards. Ces algorithmes sont compatibles avec les algorithmes correspondants sur les tableaux de Young standards donnés au chapitre 1. Plus précisément, nous allons introduire un algorithme de transposition d'un mot de Yamanouchi qui similera la transposition des tableaux de Young standards. Ensuite, nous traduirons le jeu de taquin de Schützenberger sur les mots. Nous définirons les glissements en avant et les glissements en arrière sur un suffixe d'un mot de Yamanouchi, ayant une forme gauche donnée. Nous allons aussi développer un algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi. Notons que cet algorithme d'évacuation a été déjà élaboré par D. Foata (Foata, 1976) sauf que nous le donnerons d'une manière plus concise. Finalement, nous allons concevoir un algorithme pour la correspondance  $\pi$  de Schensted permettant de passer directement de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  à  $\pi(\sigma) = (u, v)$  la paire de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , sans passer par la paire  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda$ . Nous allons aussi élaborer un algorithme pour la correspondance  $\pi^{-1}$  permettant de passer directement de  $(u, v)$  vers  $\sigma$ . Nous définirons des fonctions que nous appellerons fonctions d'insertion et fonctions de suppression. Ces fonctions correspondent sur les tableaux de Young standards aux algorithmes d'insertion et de suppression liés à un élément et un tableau, définis par Schensted. Enfin, nous montrerons le lien étroit de cette correspondance avec la construction géométrique de Viennot. En effet, dans (Viennot, 1977) il a introduit un algorithme

permettant d'associer d'une manière bijective à toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . Il a utilisé les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  pour lui associer une telle paire  $(u, v)$ , ensuite il a montré que si  $\pi(\sigma) = (P(\sigma), Q(\sigma))$ , alors  $u = \omega(P(\sigma))$  et  $v = \omega(Q(\sigma))$ . Plus précisément, il a montré que pour tout  $i \in [n]$  : la  $i$ -ème lettre de  $u$  est  $k$  (resp. la  $i$ -ème lettre de  $v$  est  $k$ ) si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp.  $x_{L^{k-1}} = i$ ). Pour montrer ce résultat, il a utilisé des fonctions qu'il a noté par  $\theta_i$  et  $\rho_i$  définies de la même façon que les fonctions d'insertion  $\mathcal{I}_i$  et  $\mathcal{E}_i$  données au début de la dernière section de ce chapitre.

### 3.1 Algorithme de transposition d'un mot de Yamanouchi

Comme les mots de Yamanouchi sont en bijection avec les tableaux de Young standards, nous allons élaborer un algorithme de transposition d'un mot de Yamanouchi de sorte que le transposé d'un mot de Yamanouchi, associé à un tableau de Young standard  $t$ , soit exactement le mot de Yamanouchi associé au transposé de ce tableau qu'on note par  $t^T$ .

**Définition 44** Soit  $u = a_1 a_2 \cdots a_n$  un mot de Yamanouchi de longueur  $n$ . Pour tout entier  $i = 1, 2, \dots, n$ , on définit  $b_i$  comme le nombre d'entiers  $j$  tels que  $1 \leq j \leq i$  et  $a_j = a_i$ , c'est-à-dire que :

$$b_i = |\text{préf}_i(u)|_{a_i}.$$

On pose  $u^T = b_1 b_2 \cdots b_n$  et on l'appelle le transposé de  $u$ .

Le résultat de la proposition suivante est le résultat du lemme 1 donné par Foata dans (Foata, 1976).

**Proposition 10** (Foata, 1976) Le transposé  $u^T$  d'un mot de Yamanouchi  $u$  est un mot de Yamanouchi. De plus,

$$(u^T)^T = u.$$



Dans (Foata, 1976), D. Foata a associé à chaque mot  $u$ , qui n'est pas nécessairement un mot de Yamanouchi, un mot qu'il a noté par  $s(u)$ . Dans le lemme 1, il a montré que si  $u$  est un mot de Yamanouchi, le mot  $s(u)$  l'est aussi et l'on a  $s(s(u)) = u$ . Le mot  $u^T$  donné ci-dessus est défini de la même manière que  $s(u)$ . Ainsi, la preuve de la proposition précédente découle du lemme 1 dans (Foata, 1976). En effet, comme  $u$  est un mot de Yamanouchi, alors  $u^T$  l'est aussi et l'on a  $(u^T)^T = u$ , ce qui implique que l'opération de transposition d'un mot de Yamanouchi est une involution.

Notons qu'on peut obtenir  $u^T$  à partir de  $u$  comme suit : commençons par étiqueter les lettres dans  $u$  égales à 1 par 1, 2, 3, ... de gauche à droite. Ensuite, étiquetons les lettres dans  $u$  égales à 2 par 1, 2, 3, ... de gauche à droite. On réitère ce processus pour les lettres égales à 3, les lettres égales à 4 et ainsi de suite. Par conséquent,  $u^T$  est le mot obtenu en lisant les étiquettes de gauche à droite. Par exemple, pour  $u = 112213123$ . On a :

$$u = 1_1 1_2 2_1 2_2 1_3 3_1 1_4 2_3 3_2 \text{ et } u^T = 121231432.$$

Remarquons que le tableau de Young standard  $t$  associé à  $u$  est

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 7 \\ \hline \end{array},$$

son transposé est le tableau  $t^T$  tel que

$$t^T = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 \\ \hline 5 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

On peut remarquer facilement que le mot de Yamanouchi associé à  $t^T$  est  $u^T$ . Donc, on peut écrire

$$u = \omega(t) \iff u^T = \omega(t^T).$$

Ce qui implique que pour tout tableau de Young standard  $t$ ,

$$(\omega(t))^T = \omega(t^T).$$

De plus, on peut déduire que si  $u$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\lambda$  un partage de  $n$ , alors  $u^T$  est un mot de Yamanouchi de forme  $\lambda'$  le partage conjugué de  $\lambda$ .

On peut écrire les deux mots  $u$  et son transposé  $u^T$  simultanément comme suit :

$$(u)_{u^T} = (a_1)_{b_1} (a_2)_{b_2} \cdots (a_n)_{b_n}.$$

Par exemple, avec le mot de Yamanouchi  $u$  donné ci-haut  $(u)_{u^T} = 1_1 1_2 2_1 2_2 1_3 3_1 1_4 2_3 3_2$ . D'après ce qui précède, les lettres  $b_i$  sont respectivement les étiquettes des lettres  $a_i$ . On peut remarquer que le symbole  $(a_i)_{b_i}$  dans  $(u)_{u^T}$  signifie que l'entier  $i$  est placé, dans le tableau  $t$  associé à  $u$ , dans la case située dans la ligne  $a_i$  et la colonne  $b_i$ . Ainsi une lettre dans  $u$  est égale à  $a_i$  une fois l'entier  $i$  est placé dans le tableau  $t$  associé à  $u$  dans la case située dans la ligne  $a_i$  et une lettre dans  $u^T$  est égale à  $b_i$  une fois l'entier  $i$  est placé dans le tableau  $t$  associé à  $u$  dans la case située dans la colonne  $b_i$ .

Dans toute la suite de cette thèse, si  $u = a_1 \cdots a_n$  et  $u^T = b_1 \cdots b_n$ , alors, on peut écrire  $u$  sous la forme non étiquetée  $u = a_1 \cdots a_n$  ou bien sous la forme étiquetée  $u = (u)_{u^T} = (a_1)_{b_1} \cdots (a_n)_{b_n}$ . On peut aussi écrire une lettre  $a$  de  $u$  sous la forme  $a$  (comme une lettre de  $u$  non étiquetée) ou bien sous la forme  $a_b$  (comme une lettre étiquetée de  $(u)_{u^T}$ ) sans distinction selon la situation du problème. Remarquons que deux lettres égales de  $u$  sont deux lettres différentes de  $(u)_{u^T}$ . Par conséquent, on peut considérer toutes les lettres de  $u$  comme des lettres différentes.

Dans (Foata, 1976), D. Foata a noté  $(u)_{u^T}$  par  $\begin{pmatrix} u \\ u^T \end{pmatrix}$  en l'appelant un bimot de Yamanouchi de longueur  $n$ . Il a donné une bijection entre les tableaux de Young standards à  $n$  éléments et les bimots de Yamanouchi de longueur  $n$ . Cette bijection est identique à la bijection entre les tableaux de Young standards à  $n$  éléments et les mots de Yamanouchi de longueur  $n$ . En effet, le bimot  $\begin{pmatrix} u \\ u^T \end{pmatrix}$  est complètement donné par la donnée du mot  $u$ .

Remarquons que si  $(u)_{u^T}$  est associé au tableau  $t$ , alors  $(u^T)_u$  est associé au tableau  $t^T$ , ce qui convient parfaitement à la transposition d'un tableau car les lignes deviennent

des colonnes et les colonnes deviennent des lignes.

### 3.2 Jeu de taquin de Schützenberger sur les suffixes de mots de Yamanouchi, ayant une forme gauche donnée

**Définition 45** *Si  $u$  est un mot de Yamanouchi, alors une lettre intérieure de  $u$  est une lettre  $a$  de  $u$  qui une fois supprimée laisse un mot de Yamanouchi, c'est-à-dire que le mot obtenu de  $u$  en supprimant cette lettre  $a$  est aussi un mot de Yamanouchi. Chaque mot obtenu par une telle suppression est dénoté par  $u^-$ . Une lettre extérieure de  $u$  est une lettre  $a$  qui une fois ajoutée à la fin du mot  $u$  produit un mot de Yamanouchi, c'est-à-dire que le mot  $ua$  obtenu de  $u$  en ajoutant cette lettre  $a$  est aussi un mot de Yamanouchi. Chaque mot obtenu par un tel ajout est dénoté par  $u^+$ .*

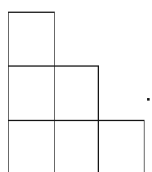
Par exemple, si  $u = 121321$ , alors

$$u^- = 12121, 12131, 12132$$

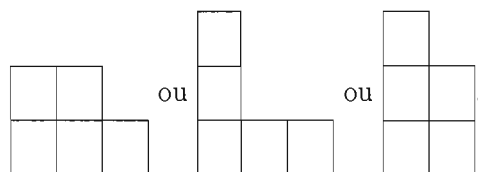
et

$$u^+ = 1213214, 1213213, 1213212, 1213211.$$

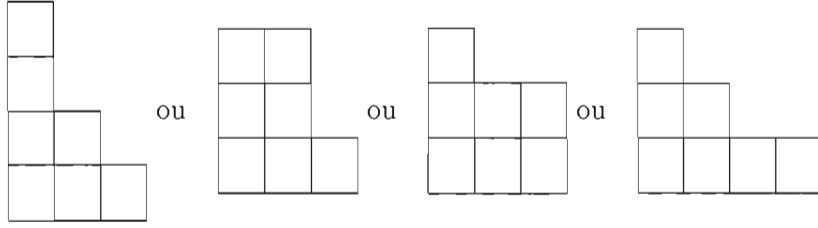
Remarquons que la forme de  $u$  est :



La forme de  $u^-$  est :



La forme de  $u^+$  est :



Nous allons maintenant donner la définition d'un glissement du jeu de taquin sur  $w$  un suffixe d'un mot de Yamanouchi. On commence par définir un glissement en avant sur  $w$  ensuite on donne la définition d'un glissement en arrière sur  $w$ .

**Définition 46** Soient  $u \in \mathcal{Y}_n$  et  $w = \text{suff}_m(u)$  pour un certain  $m < n$  tels que  $u = vw$ . Un glissement en avant sur  $w$  à partir d'une lettre  $a$  qui est une lettre intérieure de  $v$  produit un mot qu'on note par  $J^a(w)$  comme suit :

Écrivons  $u$  sous la forme  $(u)_{uT}$ . Supposons que  $a = a_b$  est une lettre de  $(u)_{uT}$ . Dans  $(u)_{uT}$ , on sélectionne la plus longue suite  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$  de lettres qui vérifie :

$$(x_1)_{y_1} = a_b$$

et pour tout  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $(x_{j+1})_{y_{j+1}}$  est la première lettre située immédiatement à droite de  $(x_j)_{y_j}$  qui vérifie

$$(x_{j+1} = x_j + 1 \text{ et } y_{j+1} = y_j) \text{ ou } (x_{j+1} = x_j \text{ et } y_{j+1} = y_j + 1).$$

Posons  $(u')_{v'} = (a'_1)_{b'_1} \cdots (a'_{n-1})_{b'_{n-1}}$  le mot de longueur  $n-1$  obtenu de  $(u)_{uT}$  en remplaçant les lettres de la suite  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$  respectivement par

$$\cdot, (x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_{k-1})_{y_{k-1}}$$

où  $\cdot$  signifie que la place de la lettre  $(x_1)_{y_1}$  dans  $(u)_{uT}$  est devenue une place vide.

On dénote le mot obtenu  $u'$  tel que  $u' = a'_1 \cdots a'_{n-1}$  par  $u^a$  et on dénote le mot  $\text{suff}_m(u^a)$  par  $J^a(w)$  (Remarquons que  $|w| = |J^a(w)|$ ).

**Définition 47** D'une manière similaire, un glissement en arrière sur  $w$  à partir d'une lettre  $a$  qui est une lettre extérieure de  $u$  produit un mot qu'on note par  $J_a(w)$  comme suit :

Écrivons  $ua$  sous la forme  $(ua)_{(ua)^T}$ . Supposons que  $a = a_b$  comme une lettre de  $(ua)_{(ua)^T}$ . Dans  $(ua)_{(ua)^T}$ , on sélectionne la plus longue suite  $(x_k)_{y_k}, (x_{k-1})_{y_{k-1}}, \dots, (x_1)_{y_1}$  de lettres qui vérifie :

$$(x_1)_{y_1} = a_b$$

et pour tout  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $(x_{j+1})_{y_{j+1}}$  est la première lettre située immédiatement à gauche de  $(x_j)_{y_j}$  qui vérifie

$$(x_{j+1} = x_j - 1 \text{ et } y_{j+1} = y_j) \text{ ou } (x_{j+1} = x_j \text{ et } y_{j+1} = y_j - 1).$$

Posons  $(u')_{y'} = (a'_1)_{b'_1} \dots (a'_n)_{b'_n}$  le mot de longueur  $n$  obtenu de  $(ua)_{(ua)^T}$  en remplaçant les lettres de la suite  $(x_k)_{y_k}, (x_{k-1})_{y_{k-1}}, \dots, (x_1)_{y_1}$  respectivement par

$$\cdot, (x_k)_{y_k}, (x_{k-1})_{y_{k-1}}, \dots, (x_2)_2$$

où  $\cdot$  signifie que la place de la lettre  $(x_1)_{y_1}$  dans  $(ua)_{(ua)^T}$  est devenue une place vide.

On dénote le mot obtenu  $u'$  tel que  $u' = a'_1 \dots a'_n$  par  $u_a$  et on dénote le mot  $\text{suff}_m(u_a)$  par  $J_a(w)$  (Remarquons que  $|w| = |J_a(w)|$ ).

Par exemple, pour  $w = 213213223$ ,  $v = 1211$  et  $u = 1211213213223 \in \mathcal{Y}_{13}$ . On a

$$u = 1_1 2_1 1_2 1_3 2_2 1_4 3_1 2_3 1_5 3_2 2_4 2_5 3_3 \text{ et } w = \text{suff}_9(u).$$

Nous allons effectuer un glissement en avant sur  $w$  à partir de  $a = 1_3$  qui est une lettre intérieure de  $v$ . On a

$$u = 1_1 2_1 1_2 (1_3) 2_2 (1_4) 3_1 2_3 (1_5) 3_2 2_4 (2_5) 3_3.$$

Les lettres de la plus longue suite définie dans la définition 46 sont entre parenthèses. Ainsi,

$$u^a = 1_1 2_1 1_2 \cdot 2_2 (1_3) 3_1 2_3 (1_4) 3_2 2_4 (1_5) 3_3 = 121213213213.$$

Ce qui implique que

$$J^{1_3}(w) = \text{suff}_9(u^a) = 213213213.$$

On peut remarquer qu'on peut identifier  $u$  au tableau de Young standard  $t$  tel que

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 10 & 13 & & \\ \hline 2 & 5 & 8 & 11 & 12 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ \hline \end{array}.$$

On peut identifier  $v$  au tableau de Young standard  $t| [4]$  et  $w$  au tableau gauche standard  $g = st(t| [5, 13])$  de sorte que  $\omega(t| [4]) = v$  et  $\omega_g(g) = w$ . En effectuant un glissement en avant sur  $g$  à partir de la case  $(1, 3)$  qui est un coin intérieur de  $t| [4]$ , on obtient le tableau gauche  $J^{(1,3)}(g)$  tel que :

$$J^{(1,3)}(g) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 7 \\ \hline & & 2 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}.$$

On peut remarquer que

$$\omega_g(J^{(1,3)}(g)) = J^{13}(w) = 213213213.$$

De même, on peut effectuer un glissement en arrière sur  $w$  à partir de  $a = 3$  qui est une lettre extérieure de  $u$  comme suit :

$$\begin{aligned} ua &= 12112132132233 \\ &= 1_1(2_1)1_21_32_21_4(3_1)2_31_5(3_2)2_42_5(3_3)(3_4). \end{aligned}$$

Les lettres de la plus longue suite définie dans la définition 47 sont entre parenthèses. Ainsi,

$$u_a = 1_1 \cdot 1_21_32_21_4(2_1)2_31_5(3_1)2_42_5(3_2)(3_3) = 1112122132233.$$

Ce qui implique que

$$J_{3_4}(w) = \text{supf}_9(u_a) = 122132233.$$

On peut aussi remarquer que

$$\omega_g(J_{(3,4)}(g)) = J_{3_4}(w).$$

Notons qu'un glissement est une opération inversible. En effet, soient  $u = vw \in \mathcal{Y}$  et  $a$  une lettre intérieure de  $v$ . Supposons que la lettre supprimée par le glissement en avant

à partir de  $a$  sur  $w$  est  $b$ . Le mot  $J^a(w)$  est un suffixe du mot de Yamanouchi  $u^a$  et  $b$  est une lettre extérieure de  $u^a$ . Un glissement en arrière à partir de  $b$  sur  $J^a(w)$  produit  $w$ . En d'autres mots,

$$J_b(J^a(w)) = w.$$

De même,

$$J^a(J_b(w)) = w.$$

**Définition 48** Une suite de lettres  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  est une suite de glissements pour un mot  $w$  si on peut former la suite  $w = w_0, w_1, \dots, w_k$ , où  $w_i$  est obtenu à partir de  $w_{i-1}$  par un glissement à partir de la lettre  $a_i$ . Deux mots  $w$  et  $w'$  sont équivalents et on écrit  $w \cong w'$  si  $w'$  peut être obtenu à partir de  $w$  par une certaine suite de glissements.

Un redressement de  $w$ , un suffixe d'un mot de Yamanouchi, consiste à appliquer une séquence de ces glissements pour obtenir un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{F}(w)$ . Nous allons montrer qu'il n'y a qu'un résultat possible pour le redressement, autrement dit que le choix des glissements intermédiaires n'importe pas sur le résultat final. Plus précisément, nous montrerons à la section 4.4 du chapitre 4 que le mot  $\mathcal{F}(w)$  est identique au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  associé à  $w$  par un algorithme dû à Robinson donné au début du chapitre 4, ensuite nous utiliserons le fait que  $\mathcal{L}(w)$  est unique. Le mot  $\mathcal{F}(w)$  est appelé le redressé de  $w$ . Au chapitre 4, on donnera un algorithme permettant de calculer  $\mathcal{F}(w)$ .

### 3.3 Algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi

Comme les mots de Yamanouchi sont en bijection avec les tableaux de Young standards, nous allons élaborer un algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi de sorte que l'évacué d'un mot de Yamanouchi, associé à un tableau de Young standard  $t$ , soit exactement le mot de Yamanouchi associé au tableau  $ev(t)$ .

D. Foata, dans (Foata, 1976) a défini un tel algorithme. Nous allons le décrire ici d'une manière plus concise.

**Définition 49** Soit  $u = a_1 a_2 \cdots a_n$  un mot de Yamanouchi de longueur  $n$ . On pose  $u^T = b_1 b_2 \cdots b_n$ . Comme  $(a_1)_{b_1} = (1)_1$ , alors dans  $(u)_{u^T}$ , on sélectionne la plus longue suite  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$  de lettres qui vérifie :

$$(x_1)_{y_1} = (1)_1$$

et pour tout  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $(x_{j+1})_{y_{j+1}}$  est la première lettre située immédiatement à droite de  $(x_j)_{y_j}$  qui vérifie

$$(x_{j+1} = x_j + 1 \text{ et } y_{j+1} = y_j) \text{ ou } (x_{j+1} = x_j \text{ et } y_{j+1} = y_j + 1).$$

Posons  $x_k = z_n$ .

Soit  $(u')_{v'} = (a'_1)_{b'_1} \cdots (a'_{n-1})_{b'_{n-1}}$  le mot de longueur  $n-1$  obtenu de  $(u)_{u^T}$  en remplaçant les lettres de la suite  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$  respectivement par  $\cdot, (x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_{k-1})_{y_{k-1}}$  où  $\cdot$  signifie que la place de la lettre  $(x_1)_{y_1}$  dans  $(u)_v$  est devenue une place vide.

De même, dans  $(u')_{v'}$ , on sélectionne la plus longue suite  $(x'_1)_{y'_1}, (x'_2)_{y'_2}, \dots, (x'_{k'})_{y'_{k'}}$  de lettres qui vérifie :

$$(x'_1)_{y'_1} = (1)_1$$

et pour tout  $j = 1, \dots, k'-1$ ,  $(x'_{j+1})_{y'_{j+1}}$  est la première lettre située immédiatement à droite de  $(x'_j)_{y'_j}$  qui vérifie

$$(x'_{j+1} = x'_j + 1 \text{ et } y'_{j+1} = y'_j) \text{ ou } (x'_{j+1} = x'_j \text{ et } y'_{j+1} = y'_j + 1).$$

Posons  $x'_{k'} = z_{n-1}$ .

On réitère ce processus à chaque fois jusqu'à l'obtention du mot vide. Ainsi on définit l'évacué de  $u$  qu'on note par  $u^{ev}$  comme suit :

$$u^{ev} = z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n.$$

Notons que la suite de lettres  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$  définie ci-haut correspond à une suite de cases dans le tableau  $t$  associé à  $u$ , qui sont occupées respectivement par certains



entiers  $1, \dots, m$  (les entiers  $1, \dots, m$  ne sont pas nécessairement consécutifs). La suite  $(1, \dots, m)$  dans (Foata, 1976) est appelée un glissement de  $(u)_{u^T}$ . Notons aussi que le mot  $u'$  défini ci-haut est un mot de Yamanouchi et que le tableau de Young standard associé à  $u'$  est obtenu du tableau de Young standard associé à  $u$  par standardisation du tableau standard obtenu de  $t$  par l'algorithme de suppression du plus petit élément donné à la sous-section 1.8.1. Plus précisément, si  $u = \omega(t)$ , alors  $u' = \omega(st(\Delta t))$ . Ce qui implique que les mots non vides dans la suite  $u, u', \dots$  sont des mots de Yamanouchi et leurs longueurs sont respectivement  $n, n-1, \dots, 1$ .

Par exemple, pour  $u = 111234232$ , on a  $u^{ev} = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 = 112123432$ . En effet, ci-dessous, en évacuant le mot de Yamanouchi  $u$ , d'une ligne à une ligne suivante du haut vers le bas, on remplace les lettres d'une suite  $(x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_k)_{y_k}$ , dont on a écrit les termes entre des parenthèses, respectivement par les lettres de la suite  $\cdot, (x_1)_{y_1}, (x_2)_{y_2}, \dots, (x_{k-1})_{y_{k-1}}$  et on pose  $z_j = x_k$  où  $x_k$  est la lettre encadrée.

Remarquons que  $u = 111234232$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $P$  donné à la sous-section 1.8.2 et que  $u^{ev} = 112123432$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau  $ev(P)$  donné dans la même section.

En général, on peut déduire que pour tout tableau de Young standard  $t$  :

$$u = \omega(t) \Rightarrow u^{ev} = \omega(ev(t)).$$

Comme  $u^{ev} = \omega(ev(t)) \Rightarrow (u^{ev})^{ev} = \omega(ev(ev(t))) = \omega(t) = u$ , on a

$$u = \omega(t) \Leftrightarrow u^{ev} = \omega(ev(t)).$$

Ce qui implique que pour tout tableau de Young standard  $t$ ,

$$(\omega(t))^{ev} = \omega(ev(t)).$$

De plus,  $(u^{ev})^{ev} = u$ , ce qui implique que l'opération d'évacuation d'un mot de Yamanouchi est une involution. On peut déduire aussi que pour tout mot de Yamanouchi  $u$ , on a :

$$(u^{ev})^T = (u^T)^{ev}.$$



### 3.4 Algorithme donnant la correspondance de Schensted sur les mots de Yamanouchi

Dans cette section, nous allons élaborer un algorithme donnant la correspondance de Schensted entre les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . Cet algorithme associe à chaque permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$  de sorte que si  $\pi(\sigma) = (P(\sigma), Q(\sigma))$  où  $P(\sigma)$  est le  $P$ -symbole de  $\sigma$  et  $Q(\sigma)$  le  $Q$ -symbole de  $\sigma$ , alors  $u = \omega(P(\sigma))$  et  $v = \omega(Q(\sigma))$ . Nous donnons également la bijection inverse permettant de passer de  $(u, v)$  à  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Nous utiliserons des fonctions que nous appellerons fonctions d'insertion et fonctions de suppression. Ces fonctions correspondent sur les tableaux standards aux algorithmes d'insertion et de suppression liés à un élément et un tableau définis par Schensted.

Commençons par décrire un algorithme qui décrit le passage d'une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  à une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ .

#### 3.4.1 Fonction d'insertion

Notons par  $\mathbb{N}_n^*$  l'ensemble de tous les mots de  $\mathbb{N}^*$  de longueur  $n$ . Pour tout  $i \in [n]$ , nous définissons  $\mathcal{I}_i$  une fonction de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit :

**Définition 50** (Viennot, 1977) *Pour tout  $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathbb{N}_n^*$  et pour tout  $i \in [n]$ , le mot  $\mathcal{I}_i(u)$  de longueur  $n$  est obtenu de  $u$  comme suit : dans  $u$ , on sélectionne la plus longue suite  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  de lettres qui vérifie :*

*$a_{i_0} = a_i$  et  $a_{i_1}$  est la première lettre égale à 1 qui est située directement à droite de  $a_i$*

*et pour tout  $j = 1, \dots, m-1$ ,  $a_{i_{j+1}}$  est la première lettre égale à  $a_{i_j} + 1$  qui est située directement à droite de  $a_{i_j}$ . Le mot  $\mathcal{I}_i(u)$  est obtenu de  $u$  en remplaçant cette suite par la suite  $1, 2, \dots, m+1$ . Ainsi  $\mathcal{I}_i(u)$  est obtenu de  $u$  en remplaçant une suite  $a_i, 1, 2, 3, \dots, m$  dans  $u$ , pour un certain  $m \in \mathbb{P}$ , par la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1$ . Posons  $m+1 = E_i(u)$ .*

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_i : \mathbb{N}_n^* &\longrightarrow \mathbb{N}_n^* \\
 u = \cdots a_i \cdots 1 \cdots 2 \cdots m \cdots &\longmapsto \mathcal{I}_i(u) = \cdots 1 \cdots 2 \cdots 3 \cdots (m+1) \cdots \\
 E_i : \mathbb{N}_n^* &\longrightarrow \mathbb{P} \\
 u = \cdots a_i \cdots 1 \cdots 2 \cdots m \cdots &\longmapsto E_i(u) = m+1
 \end{aligned}$$

Lorsque  $i \notin [n]$ , on dit que  $\mathcal{I}_i(u)$  et  $E_i(u)$  sont non définis.

Les fonctions  $\mathcal{I}_i$  et  $E_i$  définies ci-dessus ont été introduites par Viennot dans (Viennot, 1977) où elles étaient notées respectivement par  $\theta_i$  et  $\rho_i$ .

Par exemple, on a :

$$\mathcal{I}_4(314352631154322113674524) = 314152632154332114675624$$

et donc

$$E_4(314352631154322113674524) = 6.$$

Cet exemple est bien illustré sur la figure donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_4(314352631154322113674524) = \\
 = 314152632154332114675624
 \end{aligned}$$

Figure 3.1 Fonction d'insertion

Pour un mot  $u$ , nous définissons la fonction  $\mathcal{I}_u$  de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit :

**Définition 51** Pour tout mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_k$  tel que  $a_i \in [n]$  pour tout  $i \in [k]$ , nous définissons la fonction  $\mathcal{I}_u$  de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit :

$$\mathcal{I}_u = \mathcal{I}_{a_1 a_2 \cdots a_k} = \mathcal{I}_{a_k} \circ \mathcal{I}_{a_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{I}_{a_1}$$

où  $\circ$  dénote l'opération de composition des fonctions. Nous définissons aussi la fonction  $E_u$  de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit : pour tout  $v \in \mathbb{N}_n^*$

$$\begin{aligned}
 E_u(v) &= E_{a_1 a_2 \dots a_k}(v) \\
 &= E_{a_1}(v) E_{a_2}(\mathcal{I}_{a_1}(v)) \dots E_{a_k}((\mathcal{I}_{a_{k-1}} \circ \dots \circ \mathcal{I}_{a_1})(v)) \\
 &= E_{a_1}(v) E_{a_2}(\mathcal{I}_{a_1}(v)) \dots E_{a_k}(\mathcal{I}_{a_1 \dots a_{k-1}}(v)) \\
 &= \prod_{i=1}^k E_{a_i}(\mathcal{I}_{a_1 \dots a_{i-1}}(v)).
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $E_u(v)$  est un mot de longueur  $k$ .

La formule suivante définit complètement la fonction  $E$ .

Pour tous mots  $x, y$  et  $v$ , on a :

$$E_{xy}(v) = E_x(v) E_y(\mathcal{I}_x(v)).$$

Par exemple, pour  $u = 24$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{24}(53213214334) &= \mathcal{I}_4(\mathcal{I}_2(53213214334)) \\
 &= \mathcal{I}_4(51223314435) \\
 &= 51213324435
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 E_{24}(53213214334) &= E_2(53213214334) E_4(\mathcal{I}_2(53213214334)) \\
 &= E_2(53213214334) E_4(51223314435) \\
 &= 52.
 \end{aligned}$$

Cette fonction d'insertion correspond à l'algorithme d'insertion d'un élément dans un tableau standard comme l'énonce la proposition suivante qui a été donné d'une manière équivalente dans (Viennot, 1977) à la page 48 après les relations (17) et (18) :

**Proposition 11** (Viennot, 1977) Soient  $T$  un tableau standard et  $x \in [n]$  un entier distinct des éléments de  $T$  où  $n$  est un entier plus grand ou égale au maximum de tous

les éléments de  $T$ . On définit le mot  $\varphi_n(T)$  comme suit :

$$\varphi_n(T) = w_1 \cdots w_n$$

tel que pour tout  $i \in [n]$

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ n'apparaît pas dans } T, \\ \text{le numéro de la ligne où est placé } i \text{ dans } T, & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{I}_x(\varphi_n(T)) = \varphi_n(T \leftarrow x)$$

et  $E_x(\varphi_n(T))$  est le numéro de la ligne contenant la case ajoutée au tableau  $T$  pour obtenir le tableau  $T \leftarrow x$ .

En d'autres mots, l'application de la fonction  $\mathcal{I}_x$  au mot  $\varphi_n(T)$  est équivalente à l'insertion par l'algorithme de Schensted de l'élément  $x$  dans le tableau standard  $T$ .

Viennot dans (Viennot, 1977) a montré que  $\varphi_n$  est une bijection entre l'ensemble des tableaux standards à  $j$  éléments avec  $j \leq n$  et à valeurs dans  $A$  où  $A \subseteq [n]$  et l'ensemble des mots de Yamanouchi dans  $\mathbb{N}_n^*$ . Il a aussi montré que la restriction de  $\varphi_n$  à l'ensemble des tableaux de Young standards à  $n$  éléments réalise une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des mots de Yamanouchi dans  $\mathbb{P}_n^*$  qui est la bijection  $\omega$  donnée au chapitre 2.

Par exemple, pour

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & & & \\ \hline 4 & 8 & & \\ \hline 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

et  $x = 6$ , on a

$$(T \leftarrow 6) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & & & \\ \hline 8 & & & \\ \hline 4 & 7 & & \\ \hline 2 & 5 & 6 & 9 \\ \hline \end{array}.$$

Prenons  $n = 12$ , on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_6(\varphi_{12}(T)) &= \mathcal{I}_6(01021\mathbf{0121030}) \\
 &= 01021\mathbf{1231040} \\
 &= \varphi_{12}(T \longleftarrow 6).
 \end{aligned}$$

Remarquons que  $E_6(\varphi_{12}(T)) = 4$  et que la case ajoutée à  $T$  pour obtenir  $T \longleftarrow 6$  est dans la quatrième ligne.

### Preuve

Comme la  $x$ -ème lettre de  $\varphi_n(T)$  est 0 car  $x$  n'est pas un élément de  $T$ , alors le mot  $\mathcal{I}_x(\varphi_n(T))$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$  en remplaçant une suite  $0, 1, 2, \dots, m$  dans  $\varphi_n(T)$  par la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1$  pour un certain  $m \in \mathbb{P}$ . Comme l'élément  $x$  n'est pas un élément du tableau  $T$ , alors l'algorithme d'insertion de Schensted implique que l'élément  $x$  va être forcément dans la première ligne du tableau  $T \longleftarrow x$ . En effet, lorsqu'on insère l'élément  $x$  dans le tableau  $T$  il remplacera le plus petit élément des éléments de la première ligne de  $T$  qui sont plus grands que lui et si un tel élément n'existe pas, alors il sera tout simplement ajouté à la fin de cette première ligne de  $T$ . L'élément qui a été remplacé par  $x$  et qui est plus grand que  $x$  va être éjecté et inséré de la même manière dans la deuxième ligne du tableau  $T$ . On continue ce processus d'insertion jusqu'à l'obtention du tableau standard  $T \longleftarrow x$ . Comme l'élément  $x$  sera dans la première ligne du tableau  $T \longleftarrow x$ , alors le mot  $\varphi_n(T \longleftarrow x)$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$  en remplaçant cette lettre 0 par 1. La première lettre égale à 1 dans le mot  $\varphi_n(T)$ , qu'on note par  $a$ , située à droite de la  $x$ -ème lettre qui est 0 va être remplacée par 2 dans  $\varphi_n(T \longleftarrow x)$ . Ceci est équivalent au fait que le plus petit élément des éléments de la première ligne de  $T$  qui sont plus grands que  $x$  soit éjecté à la deuxième ligne. La première lettre égale à 2 dans le mot  $\varphi_n(T)$ , qu'on note par  $b$ , située à droite de la lettre  $a$  va être remplacée par 3 dans  $\varphi_n(T \longleftarrow x)$ . Ceci est équivalent au fait que le plus petit élément des éléments de la deuxième ligne de  $T$  qui sont plus grands que  $a$  soit éjecté à la troisième ligne. En général, lorsqu'une lettre égale à  $i$  dans le mot  $\varphi_n(T)$  est remplacée par  $i+1$  dans  $\varphi_n(T \longleftarrow x)$ , ceci est équivalent qu'un élément est

éjecté de la ligne  $i$  vers la ligne  $i + 1$  dans le tableau  $T$ . Par conséquent,  $\varphi_n(T \leftarrow x)$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$  en remplaçant la même suite  $0, 1, 2, \dots, m$  dans  $\varphi_n(T)$  donnée ci-dessus où le premier terme 0 représente la  $x$ -ème lettre de  $\varphi_n(T)$  par la même suite  $1, 2, 3, \dots, m + 1$  de la même manière dont le mot  $\mathcal{I}_x(\varphi_n(T))$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$ .  
Donc

$$\varphi_n(T \leftarrow x) = \mathcal{I}_x(\varphi_n(T)).$$

Pour montrer que  $E_x(\varphi_n(T))$  est le numéro de la ligne contenant la case ajoutée à  $T$  pour obtenir  $T \leftarrow x$ , il suffit de remarquer que  $E_x(\varphi_n(T)) = m + 1$  et que  $m + 1$  est le numéro d'une telle ligne.

□

Maintenant, on donne la proposition suivante :

**Proposition 12** *Soit  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n) \in \mathcal{S}_n$ . Les mots  $\mathcal{I}_\sigma(0^n)$  et  $E_\sigma(0^n)$  sont deux mots de Yamanouchi de longueur  $n$  de même forme  $\lambda \vdash n$  où  $0^n$  dénote le mot de longueur  $n$  dont toutes les lettres sont égales à 0.*

Par exemple, pour  $\sigma = 3641725 \in \mathcal{S}_7$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\sigma(0^7) &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_7(\mathcal{I}_1(\mathcal{I}_4(\mathcal{I}_6(\mathcal{I}_3(0000000))))))) \\ &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_7(\mathcal{I}_1(\mathcal{I}_4(\mathcal{I}_6(0010000)))))) \\ &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_7(\mathcal{I}_1(\mathcal{I}_4(0010010)))) \\ &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_7(\mathcal{I}_1(0011020)))) \\ &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_7(1021030))) \\ &= \mathcal{I}_5(\mathcal{I}_2(1021031)) \\ &= \mathcal{I}_5(1122031) \\ &= 1122132 \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned}
E_\sigma(0^7) &= E_{3641725}(0^7) \\
&= E_3(0^7) E_6(\mathcal{I}_3(0^7)) E_4(\mathcal{I}_{36}(0^7)) E_1(\mathcal{I}_{364}(0^7)) E_7(\mathcal{I}_{3641}(0^7)) E_2(\mathcal{I}_{36417}(0^7)) \\
&\quad E_5(\mathcal{I}_{364172}(0^7)) \\
&= E_3(0000000) E_6(0010000) E_4(0010010) E_1(0011020) E_7(1021030) E_2(1021031) \\
&\quad E_5(1122031) \\
&= 1123122.
\end{aligned}$$

On peut facilement remarquer que  $\mathcal{I}_\sigma(0^7) = 1122132$  et que  $E_\sigma(0^7) = 1123122$  sont deux mots de Yamanouchi de longueur 7 de même forme  $(3, 3, 1) \vdash 7$ .

On a vu à la sous-section 1.4.3 du chapitre 1 que l'algorithme de Schensted associe à la permutation  $\sigma = 3641725 \in \mathcal{S}_7$  deux suites

$$(P_0, P_1, \dots, P_7) \text{ et } (Q_0, Q_1, \dots, Q_7)$$

de tableaux standards telles que

$$P_7 = P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q_7 = Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

On peut remarquer que

$$\mathcal{I}_\sigma(0^7) = 1122132 = \omega(P(\sigma))$$

et que

$$E_\sigma(0^7) = 1123122 = \omega(Q(\sigma)).$$

On peut remarquer aussi que les deux suites de mots  $(\mathcal{I}_{\sigma(1)}(0^7), \mathcal{I}_{\sigma(1)\sigma(2)}(0^7), \dots, \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(7)}(0^7))$  et  $\left(E_{\sigma(1)}(0^7), E_{\sigma(1)}(0^7) E_{\sigma(2)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)}(0^7)), \dots, \prod_{i=1}^7 E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^7))\right)$  correspondent respectivement aux suites de tableaux  $(P_1, \dots, P_7)$  et  $(Q_1, \dots, Q_7)$  comme illustré dans le

tableau ci-dessous

$k$	$(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^7))$	$P_k$	$\prod_{i=1}^k E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^7))$	$Q_k$														
1	0010000	<table><tr><td>3</td></tr></table>	3	1	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1												
3																		
1																		
2	0010010	<table><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	6	11	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2										
3	6																	
1	2																	
3	0011020	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	3	4	112	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2								
6																		
3	4																	
3																		
1	2																	
4	1021030	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	6	3	1	4	1123	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	3	1	2						
6																		
3																		
1	4																	
4																		
3																		
1	2																	
5	1021031	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr></table>	6	3	1	4	7	11231	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	1	2	5				
6																		
3																		
1	4	7																
4																		
3																		
1	2	5																
6	1122031	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr></table>	6	3	4	1	2	7	112312	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	6	1	2	5		
6																		
3	4																	
1	2	7																
4																		
3	6																	
1	2	5																
7	1122132	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	6	3	4	7	1	2	5	1123122	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	4	3	6	7	1	2	5
6																		
3	4	7																
1	2	5																
4																		
3	6	7																
1	2	5																

Cette correspondance est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 6** Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et pour tout  $1 \leq k \leq n$  :

$$\varphi_n(P_k) = \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^n) \text{ et } \omega(Q_k) = \prod_{i=1}^k E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n))$$

où  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  et  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  sont les deux suites de tableaux standards associées par l'algorithme de Schensted à la permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  avec  $P_n = P(\sigma)$  et  $Q_n = Q(\sigma)$ .

On peut remarquer que  $\varphi_n(P_n) = \omega(P_n)$  car  $P_n$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments  $1, \dots, n$ .

### Preuve

Montrons que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $\varphi_n(P_k) = \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^n)$ . On procède par récurrence sur  $k$ . En effet, comme  $P_1$  est un tableau standard à un seul élément  $\sigma(1)$ , alors  $\varphi_n(P_1) = 0 \dots 010 \dots 0$  où la  $\sigma(1)$ -ème lettre égale à 1 et toutes les autres lettres sont égales à 0. Ainsi

$$\varphi_n(P_1) = \mathcal{I}_{\sigma(1)}(0^n).$$

Supposons que  $\varphi_n(P_{k-1}) = \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k-1)}(0^n)$  avec  $2 \leq k \leq n$  et montrons que  $\varphi_n(P_k) = \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^n)$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^n) &= (\mathcal{I}_{\sigma(k)} \circ \mathcal{I}_{\sigma(k-1)} \circ \dots \circ \mathcal{I}_{\sigma(1)})(0^n) \\ &= \mathcal{I}_{\sigma(k)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k-1)}(0^n)) \\ &= \mathcal{I}_{\sigma(k)}(\varphi_n(P_{k-1})). \end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer que  $\varphi_n(P_k) = \mathcal{I}_{\sigma(k)}(\varphi_n(P_{k-1}))$ . Ceci découle directement de la proposition 7 précédente car  $P_k = P_{k-1} \longleftarrow \sigma(k)$ . En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_n(P_k) &= \varphi_n(P_{k-1} \longleftarrow \sigma(k)) \\ &= \mathcal{I}_{\sigma(k)}(\varphi_n(P_{k-1})) \\ &= \mathcal{I}_{\sigma(k)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k-1)}(0^n)) \\ &= \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}(0^n). \end{aligned}$$

Montrons que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\omega(Q_k) = \prod_{i=1}^k E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)).$$

En effet, comme  $\omega(Q_k)$  est le mot de Yamanouchi de longueur  $k$  associé au tableau de Young standard  $Q_k$  à  $k$  éléments  $1, \dots, k$  et comme  $\prod_{i=1}^k E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n))$  est un mot de longueur  $k$ , alors il suffit de montrer que  $E_{\sigma(1)}(0^n) = 1$  et que pour tout  $2 \leq i \leq k$ ,  $E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n))$  est le numéro de la ligne du tableau  $Q_k$  contenant l'élément  $i$ .

Il est clair que  $E_{\sigma(1)}(0^n) = 1$ . Comme le mot  $\mathcal{I}_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n))$  est obtenu du mot  $\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)$  en remplaçant une suite  $0, 1, 2, \dots, m$  dans  $\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)$  où le premier terme 0 représente la  $\sigma(i)$ -ème lettre de  $\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)$  par la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1$  pour un certain  $m \in \mathbb{P}$ , alors

$$E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)) = m+1.$$

D'après la proposition 11 précédente, l'application de la fonction  $\mathcal{I}_{\sigma(i)}$  au mot  $\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)$  est équivalente à l'insertion par l'algorithme de Schensted de l'élément  $\sigma(i)$  dans le tableau standard  $P_{i-1}$ . Donc  $m+1$  est le numéro de la ligne du tableau  $P_i$  contenant la case qui a été ajoutée au tableau  $P_{i-1}$ . Par l'algorithme d'insertion de Schensted, le tableau de Young standard  $Q_i$  a les mêmes cases que le tableau standard  $P_i$  et la case dans  $Q_i$  contenant  $i$  est située dans la  $(m+1)$ -ème ligne. Ce qui implique que la case contenant l'élément  $i$  dans le tableau  $Q_k$  est située aussi dans la  $(m+1)$ -ème ligne de  $Q_k$  car  $Q_i = Q_k | [i]$ .

□

Maintenant, on donne la preuve de la proposition 12.

### Preuve

D'après le lemme 6,

$$\omega(P(\sigma)) = \omega(P_n) = \varphi_n(P_n) = \mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(n)}(0^n) = \mathcal{I}_{\sigma}(0^n).$$

et

$$\omega(Q(\sigma)) = \omega(Q_n) = \prod_{i=1}^n E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^n)) = E_{\sigma}(0^n).$$

□

En remplaçant 0 par  $\cdot$  et en écrivant les mots : 0010000, 0010010, 0011020, 1021030, 1021031, 11220031 et 1122132 de la deuxième colonne du tableau donné dans l'exemple

illustratif précédent, on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 2 & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 3 & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 3 & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & 3 & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2
 \end{array} \tag{A}$$

Ce dessin sous forme d'un carré montre clairement les insertions de l'algorithme de Schensted. Dans toute la suite de cette thèse, nous allons appeler un tel carré *le carré des insertions*. En effet, la première ligne correspond au tableau à un seul élément 3. La deuxième ligne montre que l'élément 6 a été inséré et que l'élément 3 est toujours dans la première ligne. La troisième ligne montre que l'élément 4 a été inséré et que l'élément 3 est toujours dans la première ligne tandis que l'élément 6 a été éjecté à la deuxième ligne. On continue ainsi jusqu'à l'obtention de la dernière ligne qui est  $\omega(P(\sigma))$ .

En appliquant à ce carré une rotation de  $90^\circ$  par rapport à son coin supérieur gauche, on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 2 \\
 \cdot & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \tag{B}$$

En identifiant les points dans ce carré aux points du carré  $[7] \times [7]$  de  $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ , on peut lire la permutation  $\sigma = 3641725$  directement de ce carré. En effet, son graphe illustré dans la figure 1.1 au chapitre 1 est représenté par les lettres 1 de sorte que chaque lettre 1

est située la première à gauche dans sa ligne comme illustré ci-dessous

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbb{P} & 1 & 2 & \\
 \cdot & \mathbb{P} & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbb{P} & \\
 \cdot & \cdot & \mathbb{P} & 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot \\
 \mathbb{P} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbb{P} & 1 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \mathbb{P} & 1 & 1 & 1 & 
 \end{array} \tag{C}$$

On peut obtenir le mot de Yamanouchi  $v = \omega(Q(\sigma)) = 1123122$  de la construction (B) donnée ci-haut en écrivant les lettres de  $\mathbb{P}$  selon leur ordre d'apparition de la colonne située à gauche jusqu'à la colonne située à droite. Dans cet exemple, une lettre 1 a apparu, ensuite une deuxième lettre 1, ensuite une lettre 2, ensuite une lettre 3, ensuite une troisième lettre 1, ensuite une deuxième lettre 2 et finalement une troisième lettre 2, ce qui donne le mot de Yamanouchi  $\omega(Q(\sigma)) = v = 1123122$ . Ceci correspond à la construction de  $Q$  à partir de la suite  $(P_1, \dots, P_n)$  qui consiste à remplir les cases de  $Q$  respectivement par les entiers  $1, \dots, n$  selon leur ordre d'apparition dans la suite  $(P_1, \dots, P_n)$ .

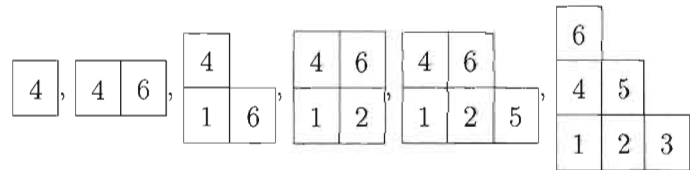
Dans toute la suite de cette thèse, on construit à partir d'une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une suite de mots de la même manière que celle donnée dans la construction (A) ci-dessus. On indique à chaque fois la nouvelle lettre qui a apparu. Ainsi, le dernier mot obtenu est  $\omega(P(\sigma))$  et le mot constitué des lettres selon leurs ordre d'apparition est  $\omega(Q(\sigma))$ . Par exemple, pour  $\sigma = 461253$ , on a

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\
 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 1 & 2 \\
 1 & 1 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & 2 \\
 1 & 1 & \cdot & 2 & 1 & 2 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3
 \end{array}$$

Ce qui implique que  $\omega(P(\sigma)) = 111223$  et  $\omega(Q(\sigma)) = 112213$ . Les lignes de ce carré correspondent respectivement du haut vers le bas aux insertions des éléments 4, 6, 1, 2, 5 et 3. On peut aussi identifier les mots dans les colonnes du haut vers le bas et de gauche à droite

$$\cdot \cdot 1111, \cdot \cdot \cdot 111, \cdot \cdot \cdot \cdot 1, 112222, \cdot \cdot \cdot 12 \text{ et } \cdot 11223,$$

aux chemins parcourus par les éléments de  $[6]$  respectivement. Par exemple, l'élément 4 comme le montre le quatrième mot 112222 a été le premier élément inséré. Il a été inséré dans la ligne 1, ensuite il a resté dans la ligne 1 lorsqu'on a inséré un autre élément, ensuite il a été éjecté par un certain élément à la deuxième ligne et l'insertion des éléments restants la laisser dans cette deuxième ligne. L'élément 6 comme le montre le sixième mot  $\cdot 11223$  est le deuxième élément qui a été inséré. Il a été inséré dans la ligne 1, ensuite il a resté dans la ligne 1 lorsqu'on a inséré un autre élément, ensuite il a été éjecté par un certain élément à la deuxième ligne et l'insertion d'un autre élément la laisser dans cette deuxième ligne alors que l'insertion du dernier élément l'a éjecté à la troisième ligne. On peut remarquer ceci clairement dans la suite de tableaux  $(P_1, \dots, P_6)$  associée à la permutation  $\sigma$  par l'algorithme d'insertion de Schensted



Nous allons maintenant donner un algorithme qui décrit le passage d'une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$  à une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ .

### 3.4.2 Fonction de suppression

Pour tout  $i \in \mathbb{P}$ , nous définissons  $\mathcal{D}_i$  une fonction de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit :

**Définition 52** Pour tout  $u = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbb{N}_n^*$  et pour toute lettre  $i$  de  $u$ , le mot  $\mathcal{D}_i(u)$  de longueur  $n$  est obtenu de  $u$  comme suit : dans  $u$ , on sélectionne la plus longue suite  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , de lettres dans  $\mathbb{P}$ , qui vérifie :

$a_{i_0}$  est la première lettre égale à  $i$  qui est située complètement à droite dans  $u$





**Définition 53** Pour tout mot  $u = a_1 a_2 \cdots a_k$ , nous définissons  $\mathcal{D}_u$  une fonction de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit :

$$\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_{a_1 a_2 \cdots a_k} = \mathcal{D}_{a_1} \circ \mathcal{D}_{a_2} \circ \cdots \circ \mathcal{D}_{a_{k-1}} \circ \mathcal{D}_{a_k}.$$

Nous définissons aussi  $H_u$  une fonction de  $\mathbb{N}_n^*$  vers  $\mathbb{N}_n^*$  comme suit : pour tout  $v \in \mathbb{N}_n^*$

$$\begin{aligned} H_u(v) &= H_{a_1 a_2 \cdots a_k}(v) \\ &= H_{a_1}((\mathcal{D}_{a_2} \circ \cdots \circ \mathcal{D}_{a_k})(v)) H_{a_2}((\mathcal{D}_{a_3} \circ \cdots \circ \mathcal{D}_{a_k})(v)) \cdots H_{a_{k-1}}(\mathcal{D}_{a_k}(v)) H_{a_k}(v) \\ &= H_{a_1}(\mathcal{D}_{a_2 \cdots a_k}(v)) H_{a_2}(\mathcal{D}_{a_3 \cdots a_k}(v)) \cdots H_{a_{k-1}}(\mathcal{D}_{a_k}(v)) H_{a_k}(v) \\ &= \prod_{i=1}^k H_{a_i}(\mathcal{D}_{a_{i+1} \cdots a_k}(v)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $H_u(v)$  s'il existe est un mot de longueur  $k$ .

La formule suivante définit complètement la fonction  $H$ .

Pour tous mots  $x, y$  et  $v$ , on a :

$$H_{xy}(v) = H_x(\mathcal{D}_y(v)) H_y(v).$$

Par exemple, pour  $u = 24$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{24}(532132143) &= \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_4(53\mathbf{2132143})) \\ &= \mathcal{D}_2(5311\mathbf{22133}) \\ &= 531021133 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{24}(532132143) &= H_2(\mathcal{D}_4(53\mathbf{2132143})) H_4(532132143) \\ &= H_2(5311\mathbf{22133}) H_4(53\mathbf{2132143}) \\ &= 43. \end{aligned}$$

Lorsque  $u$  est un mot de Yamanouchi et  $i$  est une lettre de  $u$ , le mot  $\mathcal{D}_i(u)$  est obtenu de  $u$  en remplaçant une suite  $1, \dots, i-2, i-1, i$  dans  $u$  par la suite  $0, \dots, i-2, i-1$ .

Cette fonction de suppression correspond à l'algorithme de suppression d'un élément d'un tableau standard comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 13** *Soient  $T$  un tableau standard et  $(s, t)$  un coin intérieur de  $T$ . Pour tout  $n$  plus grand ou égal au maximum de tous les éléments de  $T$ , on a*

$$\mathcal{D}_s(\varphi_n(T)) = \varphi_n(T')$$

et  $H_s(\varphi_n(T)) = x$  où  $T'$  est le tableau obtenu de  $T$  après la suppression commençant de la case  $(s, t)$  et  $x$  est l'élément éjecté du tableau  $T$  par cette suppression.

Par exemple, pour

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & & & \\ \hline 8 & & & \\ \hline 4 & 7 & & \\ \hline 2 & 5 & 6 & 9 \\ \hline \end{array}$$

et  $(s, t) = (4, 1)$ , on a

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & & & \\ \hline 4 & 8 & & \\ \hline 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi  $x = 6$ . Prenons  $n = 12$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_4(\varphi_{12}(T)) &= \mathcal{D}_4(010211\mathbf{23}1040) \\ &= 010210\mathbf{12}1030 \\ &= \varphi_{12}(T'). \end{aligned}$$

Remarquons que  $H_4(\varphi_{12}(T)) = 6$  et que l'élément éjecté de  $T$  pour obtenir  $T'$  est  $x = 6$ .

### Preuve

Comme la case  $(s, t)$  est un coin intérieur de  $T$ ,  $\varphi_n(T)$  a au moins une lettre égale à  $s$ . Donc,  $\mathcal{D}_s(\varphi_n(T))$  est obtenu de  $\varphi_n(T)$  en remplaçant une suite  $1, \dots, s-2, s-1, s$  dans  $\varphi_n(T)$  par la suite  $0, \dots, s-2, s-1$ . Supposons que la première lettre 1 dans la

suite  $1, \dots, s-2, s-1, s$  est la  $x$ -ème lettre dans  $\varphi_n(T)$ , alors  $H_s(\varphi_n(T)) = x$ . Lorsque deux termes consécutifs  $i-1$  et  $i$  dans la suite  $1, \dots, s-2, s-1, s$  deviennent  $i-2$  et  $i-1$  dans la suite  $0, \dots, s-2, s-1$ , ceci correspond au fait qu'un élément dans le tableau  $T$  se trouvant dans la ligne  $i$  s'est déplacé vers la ligne  $i-1$  en remplaçant le plus grand élément parmi les éléments de cette ligne qui sont plus petit que lui et que cet élément qui a été remplacé s'est déplacé à la ligne  $i-2$  de la même manière. Par conséquent,  $\varphi_n(T')$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$  en remplaçant la même suite  $1, \dots, s$  dans  $\varphi_n(T)$  donnée ci-dessus où le premier terme 0 représente la  $x$ -ème lettre de  $\varphi_n(T)$  par la suite  $0, \dots, s-1$  de la même manière dont le mot  $\mathcal{D}_s(\varphi_n(T))$  est obtenu du mot  $\varphi_n(T)$ . Donc

$$\mathcal{D}_s(\varphi_n(T)) = \varphi_n(T').$$

Pour montrer que  $H_s(\varphi_n(T)) = x$  où  $x$  est l'élément éjecté du tableau  $T$  par cette suppression, il suffit de remarquer que  $x$  est un élément de  $T$  qui occupe une case dans la première ligne de  $T$  car la  $x$ -ème lettre de  $\varphi_n(T)$  est 1 et qu'il n'est pas un élément de  $T'$  car la  $x$ -ème lettre de  $\varphi_n(T')$  est 0.

□

**Proposition 14** Soient  $u = u_1 u_2 \cdots u_n$  et  $v = v_1 v_2 \cdots v_n$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , alors

$$\mathcal{D}_u(v) = 0^n \text{ et } H_u(v) = \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

Par exemple, pour  $u = 1122132$  et  $v = 1123122$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $(3, 3, 1) \vdash 7$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v(u) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2(1122132))))))) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(1122031)))))) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3(\mathcal{D}_1(1021031)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_v(u) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3(1021030)))) \\
&= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(0011020))) \\
&= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(0010010)) \\
&= \mathcal{D}_1(0010000) \\
&= 0^7
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
H_v(u) &= H_{1123122}(u) \\
&= H_1(\mathcal{D}_{123122}(u)) H_1(\mathcal{D}_{23122}(u)) H_2(\mathcal{D}_{3122}(u)) H_3(\mathcal{D}_{122}(u)) H_1(\mathcal{D}_{22}(u)) \\
&\quad H_2(\mathcal{D}_2(u)) H_2(u) \\
&= H_1(0010000) H_1(0010010) H_2(0011020) H_3(1021030) H_1(1021031) \\
&\quad H_2(1122031) H_2(1122132) \\
&= 3641725.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que  $\pi(3641725) = (P, Q)$  avec  $\omega(P) = u$  et  $\omega(Q) = v$ .

On a vu à la sous-section 1.4.3 du chapitre 1 que l'algorithme de Schensted associe à une paire de tableaux de Young standards  $(P, Q)$  de même forme  $\lambda \vdash n$  une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et que pour

$$(P, Q) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 9 & & \\ \hline 3 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 9 & & \\ \hline 2 & 7 & 8 & \\ \hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right),$$

on a  $\sigma = 731469285 \in \mathcal{S}_9$ . Posons  $u = \omega(P) = 112212313$  et  $v = \omega(Q) = 123111223$ .

On peut remarquer que

$$\mathcal{D}_v(u) = 0^9 \text{ et } H_v(u) = 731469285 \in \mathcal{S}_9.$$

On peut remarquer aussi que la suite de mots

$$(u, \mathcal{D}_{v_9}(u), \mathcal{D}_{v_8 v_9}(u), \dots, \mathcal{D}_{v_2 \dots v_9}(u))$$

correspond à la suite de tableaux standards  $(P_9, \dots, P_1)$  et que la suite de lettres

$$(H_{v_9}(u), H_{v_8}(\mathcal{D}_{v_9}(u)), \dots, H_{v_1}(\mathcal{D}_{v_2 \dots v_9}(u)))$$

correspond à la suite  $x_9, \dots, x_1$  des éléments éjectés pendant l'application de l'algorithme de suppression de Schensted sur la paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards comme illustré dans le tableau ci-dessous

$k$	$P_k$	$\mathcal{D}_{v_{k+1} \cdots v_9}(u)$	$s$	$t$	$x_k$	$H_{v_k}(\mathcal{D}_{v_{k+1} \cdots v_9}(u))$									
9	<table><tr><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	7	9	3	4	6	1	2	5	8	$112212313 = u$	3	2	5	$5 = H_{v_9}(u)$
7	9														
3	4	6													
1	2	5	8												
8	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	7	3	4	9	1	2	6	8	$112201312 = \mathcal{D}_{v_9}(u)$	2	3	8	$8 = H_{v_8}(\mathcal{D}_{v_9}(u))$	
7															
3	4	9													
1	2	6	8												
7	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	4	1	2	6	9	$112201301 = \mathcal{D}_{v_8 v_9}(u)$	2	2	2	$2 = H_{v_7}(\mathcal{D}_{v_8 v_9}(u))$		
7															
3	4														
1	2	6	9												
6	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	7	3	1	4	6	9	$102101301 = \mathcal{D}_{v_7 v_8 v_9}(u)$	1	4	9	$9 = H_{v_6}(\mathcal{D}_{v_7 v_8 v_9}(u))$			
7															
3															
1	4	6	9												
5	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	7	3	1	4	6	$102101300 = \mathcal{D}_{v_6 \cdots v_9}(u)$	1	3	6	$6 = H_{v_5}(\mathcal{D}_{v_6 \cdots v_9}(u))$				
7															
3															
1	4	6													
4	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	7	3	1	4	$102100300 = \mathcal{D}_{v_5 \cdots v_9}(u)$	1	2	4	$4 = H_{v_4}(\mathcal{D}_{v_5 \cdots v_9}(u))$					
7															
3															
1	4														

$k$	$P_k$	$\mathcal{D}_{v_{k+1}\cdots v_9}(u)$	$s$	$t$	$x_k$	$H_{v_k}(\mathcal{D}_{v_{k+1}\cdots v_9}(u))$			
3	<table border="1"><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	7	3	1	$102000300 = \mathcal{D}_{v_4\cdots v_9}(u)$	3	1	1	$1 = H_{v_3}(\mathcal{D}_{v_4\cdots v_9}(u))$
7									
3									
1									
2	<table border="1"><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	7	3	$001000200 = \mathcal{D}_{v_3\cdots v_9}(u)$	2	1	3	$3 = H_{v_2}(\mathcal{D}_{v_3\cdots v_9}(u))$	
7									
3									
1	<table border="1"><tr><td>7</td></tr></table>	7	$000000100 = \mathcal{D}_{v_2\cdots v_9}(u)$	1	1	7	$7 = H_{v_1}(\mathcal{D}_{v_2\cdots v_9}(u))$		
7									

Remarquons que dans la quatrième colonne du tableau précédent les lettres  $s$  du bas vers le haut constitue le mot  $123111223$  qui est  $\omega(Q)$ . Ainsi en posant  $\omega(Q) = v = v_1 \cdots v_9$ , la lettre  $v_i$  est égale à la lettre  $s$  correspondante.

En toute généralité, la correspondance précédente est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 7** *Soient  $u = u_1 u_2 \cdots u_n$  et  $v = v_1 v_2 \cdots v_n$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . On a pour tout  $1 \leq k \leq n$*

$$\varphi_n(P_k) = \mathcal{D}_{v_{k+1}\dots v_n}(u) \text{ et } x_k = H_{v_k}(\mathcal{D}_{v_{k+1}\dots v_n}(u))$$

où  $(P_n, \dots, P_1)$  et  $(x_n, \dots, x_1)$  sont respectivement les deux suites de tableaux standards et d'éléments éjectés associés par l'algorithme de suppression de Schensted à la paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$  avec  $\omega(P) = u$  et  $\omega(Q) = v$ .

### Preuve

Il est clair que  $\omega(P_n) = \omega(P) = u$ . Montrons que pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\varphi_n(P_k) = \mathcal{D}_{v_{k+1}\dots v_n}(u)$ . En posant  $j = n - k$ , il suffit de montrer que pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $\varphi_n(P_{n-j}) = \mathcal{D}_{v_{n+1-j}\dots v_n}(u)$ . On procède par récurrence sur  $j$ . En effet, montrons que cette propriété est vraie pour  $j = 1$ , c'est-à-dire que  $\varphi_n(P_{n-1}) = \mathcal{D}_{v_n}(u)$ . Par la proposition 13 précédente et comme  $P_{n-1}$  est obtenu de  $P_n$  par l'algorithme de suppression à

partir d'une case  $(s, t)$  avec  $s = v_n$ , on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(P_{n-1}) &= \mathcal{D}_s(\varphi_n(P_n)) \\ &= \mathcal{D}_{v_n}(\omega(P_n)) \\ &= \mathcal{D}_{v_n}(u).\end{aligned}$$

Supposons que  $\varphi_n(P_{n+1-j}) = \mathcal{D}_{v_{n+2-j}\dots v_n}(u)$  avec  $1 \leq j \leq n-1$  et montrons que  $\varphi_n(P_{n-j}) = \mathcal{D}_{v_{n+1-j}\dots v_n}(u)$ . Par la proposition 13 précédente et comme  $P_{n-j}$  est obtenu de  $P_{n+1-j}$  par l'algorithme de suppression à partir d'une case  $(s, t)$  avec  $s = v_{n+1-j}$ , on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(P_{n-j}) &= \mathcal{D}_s(\varphi_n(P_{n+1-j})) \\ &= \mathcal{D}_{v_{n+1-j}}(\mathcal{D}_{v_{n+2-j}\dots v_n}(u)) \\ &= \mathcal{D}_{v_{n+1-j}\dots v_n}(u).\end{aligned}$$

Par la proposition 13 précédente et d'après ce qui précède, il est clair que  $x_n = H_{v_n}(u)$  et pour tout  $1 \leq k \leq n-1$  :  $x_k = H_{v_k}(\mathcal{D}_{v_{k+1}\dots v_n}(u))$ .

□

Maintenant, on donne la preuve de la proposition 14.

### Preuve

Soient  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  et  $v = v_1 v_2 \dots v_n$  deux mots de Yamanouchi de même forme un partage  $\lambda$  de  $n$ . Par le lemme 7 précédent, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_v(u) &= \mathcal{D}_{v_1}(\mathcal{D}_{v_2\dots v_n}(u)) \\ &= \mathcal{D}_{v_1}(\varphi_n(P_1)) \\ &= \mathcal{D}_1(\varphi_n(P_1)) \\ &= 0^n\end{aligned}$$

car toutes les lettre du mot  $\varphi_n(P_1)$  sont égales à 0 sauf une seule lettre qui est égale à 1 à cause que le tableau  $P_1$  a un seul élément.

Pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathcal{D}_{v_k v_{k+1} \dots v_n} = \mathcal{D}_{v_k} \circ \mathcal{D}_{v_{k+1} v_{k+2} \dots v_n}.$$

Ainsi, le mot  $\mathcal{D}_{v_k v_{k+1} \dots v_n}(u)$  est obtenu du mot  $\mathcal{D}_{v_{k+1} v_{k+2} \dots v_n}(u)$  en appliquant  $\mathcal{D}_{v_k}$ , c'est-à-dire en remplaçant une suite  $1, 2, \dots, v_k - 1, v_k$  dans  $\mathcal{D}_{v_{k+1} v_{k+2} \dots v_n}(u)$  par la suite  $0, 1, 2, \dots, v_k - 2, v_k - 1$ . Supposons que  $\mathcal{D}_{v_k v_{k+1} \dots v_n}(u) = s_1 s_2 \dots s_n$  et que cette dernière suite  $0, 1, 2, \dots, v_k - 2, v_k - 1$  est la suite  $s_p, s_{p'}, \dots$  dans  $s_1 s_2 \dots s_n$ . Alors

$$H_{v_k}(\mathcal{D}_{v_{k+1} v_{k+2} \dots v_n}(v)) = p.$$

Donc l'entier  $p$  est l'indice de la lettre qui a changé de 1 vers 0. On peut remarquer que cette lettre une fois devenue 0 reste toujours 0 car la fonction de suppression  $\mathcal{D}_i$  n'influence pas sur une lettre égale à 0.

Comme  $\mathcal{D}_v(u) = 0^n$ , alors les lettres de  $u$  deviennent toutes égales à 0 par l'application successive des fonctions  $\mathcal{D}_{v_n}, \dots, \mathcal{D}_{v_1}$ , ce qui implique que

$$\{H_{a_1}(\mathcal{D}_{a_2 \dots a_n}(v)), H_{a_2}(\mathcal{D}_{a_3 \dots a_n}(v)), \dots, H_{a_{n-1}}(\mathcal{D}_{a_n}(v)), H_{a_n}(v)\} = [n].$$

Par conséquent,  $H_u(v) = \sigma \in \mathcal{S}_n$  car le mot  $H_u(v)$  est de longueur  $n$  et ses lettres sont tous les éléments de l'ensemble  $[n]$ .

□

En remplaçant 0 par  $\cdot$  et en écrivant les mots : 112212313, 112201312, 112201301, 102101301, 102101300, 102100300, 102000300, 001000200 et 000000100 de la troisième



colonne du tableau de l'exemple illustratif précédent, on obtient

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & 1 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 1 \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 1 \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot
 \end{array} \tag{D}$$

Ce dessin sous forme d'un carré montre clairement les suppressions de l'algorithme de Schensted. Dans toute la suite de cette thèse, nous allons appeler un tel carré *le carré des suppressions*. Par exemple, la première ligne, située en haut, correspond au mot de Yamanouchi  $\omega(P(\sigma))$ . Comme la dernière lettre du mot de Yamanouchi  $\omega(Q(\sigma))$  est 3, alors la première suppression correspond à appliquer la fonction  $\mathcal{D}_3$  au mot 112212313 de la première ligne pour obtenir le mot 1122 · 1312 de la deuxième ligne. On peut remarquer qu'une suite 1, 2, 3 où 1 est la 5-ème lettre, 2 est la 6-ème lettre et 3 est la 9-ème lettre du mot de la première ligne a été remplacée par la suite ·, 1, 2 dans le mot de la deuxième ligne. Ce qui correspond sur les tableaux standards correspondants de la deuxième colonne du tableau de l'exemple illustratif précédent au fait que l'élément 9 situé dans la troisième ligne de  $P_9$  a remplacé l'élément 6 situé dans la deuxième ligne qui lui aussi a remplacé l'élément 5 situé dans la première ligne et ce dernier élément 5 a été supprimé du tableau  $P_9$  pour obtenir le tableau standard  $P_8$ . Donc d'une ligne à une ligne suivante du haut vers le bas dans le carré (D) ci-dessus, une suite de la forme 1, ...,  $m$ , où 1 est la  $i$ -ème lettre et  $m$  est la  $s$ -ème lettre est remplacée par une suite ·, 1, ...,  $m - 1$ . Ce qui correspond au fait que l'élément  $s$  situé dans la  $m$ -ème ligne du tableau standard correspondant a remplacé un certain élément situé dans la  $(m - 1)$ -ème ligne qui lui aussi a remplacé un autre élément dans la  $(m - 2)$ -ème ligne jusqu'à ce qu'un dernier élément  $i$  soit supprimé de ce tableau pour obtenir le tableau standard

suivant.

Dans le carré (D) ci-dessus, la permutation  $\sigma = \sigma(1) \cdots \sigma(9)$  est défini comme suit : pour tout  $i \in [8]$ ,  $\sigma(10 - i)$  est l'entier qui vérifie que la  $\sigma(10 - i)$ -ème lettre du mot de la  $i$ -ème ligne de ce carré est 1 et elle devient 0 dans la ligne suivante. Par exemple,  $\sigma(8) = 8$  car il suffit de poser  $i = 2$  et de remarquer que la huitième lettre du mot  $1122 \cdot 1312$  de la deuxième ligne de ce carré est 1 et elle devient 0 dans le mot  $1122 \cdot 13 \cdot 1$  de la troisième ligne. Pour  $i = 9$ ,  $\sigma(1)$  est l'entier qui vérifie que la  $\sigma(1)$ -ème lettre du mot de la première ligne de ce carré est 1. Ainsi, par le carré des suppressions ci-dessus, on a :  $\sigma = 731469285$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & 2 & 1 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & 1 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3
 \end{array} \tag{E}$$

Remarquons aussi qu'en renversant le carré des suppressions précédent, c'est-à-dire la première ligne devient la dernière ligne, la deuxième ligne devient l'avant dernière ligne jusqu'à ce que la dernière ligne devient la première ligne, on obtient le carré des insertions de la permutations  $\sigma = 731469285$  donné ci-dessus

Ainsi, ce carré (E) donne les insertions en considérant la suite de ces mots du mot situé en haut jusqu'au mot situé en bas. Il donne aussi les suppressions en considérant la suite de ces mots du mot situé en bas jusqu'au mot situé en haut. En général, les suppressions et les insertions sont les opérations inverses les unes des autres comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 15** *Soit  $u = a_1 \cdots a_n$  un mot de Yamanouchi dans  $\mathbb{N}_n^*$  et  $i \in [n]$  tels que*

$a_i = 0$ , alors

$$\mathcal{D}_{E_i(u)}(\mathcal{I}_i(u)) = u \text{ et } H_{E_i(u)}(\mathcal{I}_i(u)) = i.$$

Si  $j \in [n]$  est une lettre de  $u$ , alors

$$\mathcal{I}_{H_j(u)}(\mathcal{D}_j(u)) = u \text{ et } E_{H_j(u)}(\mathcal{D}_j(u)) = j.$$

### Preuve

Si  $u = a_1 \cdots a_n$  un mot de Yamanouchi dans  $\mathbb{N}_n^*$  et  $i \in [n]$  est tel que  $a_i = 0$ , alors  $\mathcal{I}_i(u)$  est un mot de longueur  $n$  obtenu de  $u$  en remplaçant une suite  $0, 1, 2, 3, \dots, m$  dans  $u$  par la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1$ . Notons que la suite  $0, 1, 2, 3, \dots, m$  est la plus longue suite dans  $u$  satisfaisant la condition suivante : chaque terme  $k$  dans cette suite est la première lettre dans  $u$  égale à  $k$  et située à droite de la lettre  $k-1$  qui est aussi un terme de cette suite. Ainsi il n'existe pas dans  $u$  une lettre  $m+1$  située à droite de la lettre  $m$  qui est le dernier terme de cette suite. On a  $m+1 = E_i(u)$ . On peut déduire que la lettre précédente  $m+1$  qui est le dernier terme de la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1$  est telle qu'il n'existe pas une autre lettre  $m+1$  à sa droite dans le mot  $\mathcal{I}_i(u)$ , car dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une autre lettre  $m+1$  à droite de cette lettre  $m+1$ , alors  $\mathcal{I}_i(u)$  est un mot de longueur  $n$  obtenu de  $u$  en remplaçant une suite  $0, 1, 2, 3, \dots, m, m+1$  dans  $u$  par la suite  $1, 2, 3, \dots, m+1, m+2$ . Ainsi  $m+2 = E_i(u)$ , ce qui donne une contradiction. Donc, on peut déduire facilement par la définition de la fonction  $\mathcal{D}_{m+1}$  que

$$\mathcal{D}_{m+1}(\mathcal{I}_i(u)) = u \text{ et que } H_{m+1}(\mathcal{I}_i(u)) = i.$$

De même, si  $j \in [n]$  est une lettre de  $u$ , alors

$$\mathcal{I}_{H_j(u)}(\mathcal{D}_j(u)) = u \text{ et } E_{H_j(u)}(\mathcal{D}_j(u)) = j.$$

□

On peut aussi identifier les mots dans les colonnes du carré (D) donné ci-haut et ceci du haut vers le bas et de gauche à droite

$$1111111 \cdot \cdot, 111 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, 22222221 \cdot, 222111 \cdot \cdot \cdot, 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, 21111 \cdot \cdot \cdot, 333333321, \\ 11 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, 3211 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

aux chemins parcourus par les éléments de [9] respectivement. Par exemple, l'élément 3 comme le montre le troisième mot  $22222221 \cdot$  a resté dans la deuxième ligne pendant les sept premières suppressions ensuite durant la huitième suppression, il s'est déplacé à la première ligne et durant la dernière suppression il a été supprimé du tableau standard correspondant. On peut remarquer ceci clairement dans l'exemple illustratif précédent à travers la suite de tableaux  $(P_9, \dots, P_1)$ , dans la deuxième colonne, associée à la paire de tableaux  $(P, Q)$  par l'algorithme de suppression de Schensted.

Dans toute la suite de cette thèse, on construit à partir d'une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , une suite de mots de la même manière que celle donnée dans la construction (D). Cette suite donne la permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . En effet, on indique à chaque fois l'élément  $\sigma(i)$  qui est le rang de la lettre 1 qui est devenue 0. Ainsi, le mot obtenu en lisant ces lettres du bas vers le haut est la permutation  $\sigma$ . Par exemple, pour  $(u, v) = (12132, 11232)$ , on a

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Ce qui implique que  $\sigma = 45213$ . Les lignes de ce carré correspondant respectivement du haut vers le bas aux mots  $u$ ,  $\mathcal{D}_2(u)$ ,  $\mathcal{D}_{32}(u)$ ,  $\mathcal{D}_{232}(u)$  et  $\mathcal{D}_{1232}(u)$ .

Dans la proposition suivante, on donne une condition suffisante pour que deux fonctions d'insertion commutent et une autre condition suffisante pour que deux fonctions de suppressions commutent.

**Proposition 16** Soit  $u \in \mathbb{P}^n$  et  $i, j \in [n]$  tels que  $i < j$ . Supposons que  $E_i(u) = m + 1$  et que la lettre dans  $u$  égale à  $m$  et qui devenu  $m + 1$  dans le mot  $\mathcal{I}_i(u)$  est  $a_k$ , alors si  $j > k$ , on a :

$$\mathcal{I}_{ij}(u) = \mathcal{I}_{ji}(u).$$

Soient  $a$  et  $b$  deux lettres de  $u$ . Supposons que  $H_a(u) = \ell$  pour un certain  $\ell \in [n]$ . Si  $b$  n'est pas une lettre du mot  $a_\ell \cdots a_n$ , alors

$$\mathcal{D}_{ab}(u) = \mathcal{D}_{ba}(u).$$

### Preuve

La preuve de cette proposition est directe à partir de la définition de ces fonctions. Dans le premier cas l'application de la fonction d'insertion  $\mathcal{I}_i$  n'influence pas sur l'application de la fonction d'insertion  $\mathcal{I}_j$  et vice versa. En effet,  $\mathcal{I}_i$  agit seulement sur le préfixe  $a_1 \cdots a_k$  alors que  $\mathcal{I}_j$  agit seulement sur le suffixe  $a_{k+1} \cdots a_n$ . Dans le deuxième cas l'application de la fonction d'insertion  $\mathcal{D}_a$  n'influence pas sur l'application de la fonction d'insertion  $\mathcal{D}_b$  et vice versa. En effet,  $\mathcal{D}_a$  agit seulement sur le suffixe  $a_\ell \cdots a_n$  alors que  $\mathcal{D}_b$  agit seulement sur le préfixe  $a_1 \cdots a_{\ell-1}$ .

□

Maintenant, on peut donner la définition suivante :

**Définition 54** La correspondance de Schensted entre les permutations de  $S_n$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme qu'on note par  $\pi$ , est définie comme suit : Pour tout  $\sigma \in S_n$ ,

$$\pi(\sigma) = (u, v) \text{ tel que } u = \mathcal{I}_\sigma(0^n) \text{ et } v = E_\sigma(0^n).$$

Pour tout  $\lambda \vdash n$  et pour tout  $(u, v)$  avec  $u, v \in \mathcal{Y}_{n, \lambda}$  :

$$\pi^{-1}(u, v) = \sigma \text{ tel que } \sigma = H_u(v) \in S_n.$$

On a vu ci-dessus, pour  $u = 1122132$  et  $v = 1123122$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $(3, 3, 1) \vdash 7$  que

$$H_v(u) = 3641725 \in \mathcal{S}_7.$$

Remarquons aussi que

$$H_u(v) = 4613725 = (3641725)^{-1} \in \mathcal{S}_7.$$

En général, on a le résultat suivant :

**Proposition 17** *Pour tous  $u, v$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , on a :*

$$H_u(v) = (H_v(u))^{-1}.$$

Cette proposition est une conséquence directe du théorème de Schützenberger (Schützenberger, 1963) :

$$\pi(\sigma) = (P, Q) \Leftrightarrow \pi(\sigma^{-1}) = (Q, P).$$

Nous allons donner la preuve de cette proposition à la fin de la section suivante.

### 3.4.3 Lien avec la construction géométrique de Viennot

Viennot dans (Viennot, 1977) a introduit un algorithme permettant d'associer d'une manière bijective à toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une paire  $(u, v)$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . Il a utilisé les lignes saillantes des squelettes successifs de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  pour lui associer une telle paire  $(u, v)$ , ensuite il a montré que si  $\pi(\sigma) = (P(\sigma), Q(\sigma))$ , alors  $u = \omega(P(\sigma))$  et  $v = \omega(Q(\sigma))$ . Plus précisément, il a montré que pour tout  $i \in [n]$  : la  $i$ -ème lettre de  $u$  est  $k$  (resp. la  $i$ -ème lettre de  $v$  est  $k$ ) si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\sigma)$  telle que  $y_{L^{k-1}} = i$  (resp.  $x_{L^{k-1}} = i$ ). Dans (Viennot, 1977), Viennot a utilisé pour montrer ce résultat des fonctions qu'il a noté par  $\theta_i$  et  $\rho_i$  définies de la même façon que les fonctions précédentes  $\mathcal{I}_i$  et  $E_i$ . Par exemple, pour la

permutation  $\sigma = 3641725$ , les squelettes successifs de  $\sigma$  apparaissent dans la figure 1.7 dans la sous-section 1.6.2. Il est clair d'après cette correspondance de Viennot que :

$$u = 1122132 \text{ et } v = 1123122.$$

On peut observer ces deux mots  $u$  et  $v$  sur la figure 1.7 comme suit : pour obtenir le mot  $u = 1122132$ , il suffit d'étiqueter chaque demi-droite horizontale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\sigma)$  par  $(p+1)$  et ceci du bas vers le haut ; voir la figure 3.3 ci-dessous. Pour obtenir le mot  $v = 1123122$ , il suffit d'étiqueter chaque demi-droite verticale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\sigma)$  par  $(p+1)$  et ceci de la gauche vers la droite ; voir la figure 3.4 ci-dessous.

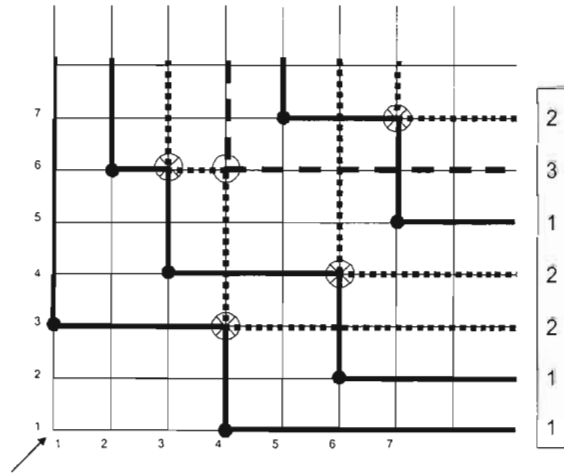


Figure 3.3 Le mot de Yamanouchi  $u = \omega(P(\sigma))$ .

On a vu que le carré donné ci-dessous montre clairement les insertions de l'algorithme

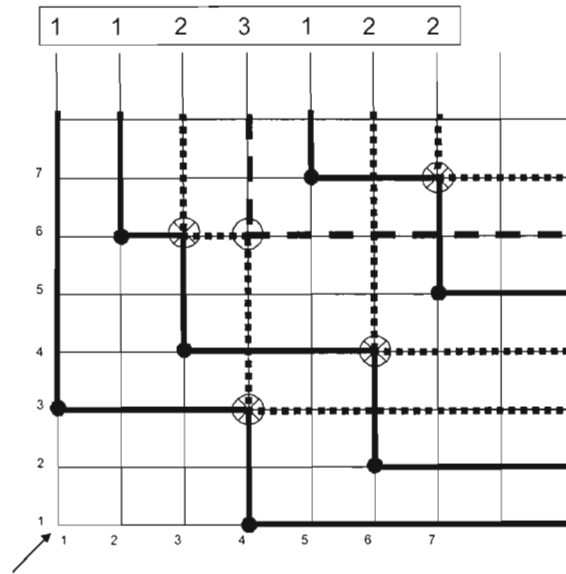


Figure 3.4 Le mot de Yamanouchi  $v = \omega(Q(\sigma))$ .

de Schensted pour la permutation  $\sigma = 3641725 \in \mathcal{S}_7$

.	.	1	.	.	.	.
.	.	1	.	.	1	.
.	.	1	1	.	2	.
1	.	2	1	.	3	.
1	.	2	1	.	3	1
1	1	2	2	.	3	1
1	1	2	2	1	3	2

La suite de mots  $\cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot$ ,  $\cdot \cdot 1 \cdot \cdot 1$ ,  $\cdot \cdot 11 \cdot 2$ ,  $1 \cdot 21 \cdot 3$ ,  $1 \cdot 21 \cdot 31$ ,  $1122 \cdot 31$  et  $1122132$  peut être calculée à partir de la construction de Viennot de la permutation  $\sigma$  donnée dans la figure 1.7 du chapitre 1.

Lorsqu'on trace dans ce graphe les droites  $x = \frac{3}{2}$ ,  $x = \frac{5}{2}$ ,  $x = \frac{7}{2}$ ,  $x = \frac{9}{2}$ ,  $x = \frac{11}{2}$ ,  $x = \frac{13}{2}$ ,  $x = \frac{15}{2}$  et  $x = \frac{17}{2}$  on peut remarquer que la droite  $x = \frac{3}{2}$  coupe le premier squelette en un point d'ordonnée 3, ce qui est donné par le mot  $\cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot$ . Les autres mots  $\cdot \cdot 1 \cdot \cdot 1$ ,  $\cdot \cdot 11 \cdot 2$ ,  $1 \cdot 21 \cdot 3$ ,  $1 \cdot 21 \cdot 31$ ,  $1122 \cdot 31$  et  $1122132$  expriment aussi la même chose. Par



exemple le mot  $1 \cdot 21 \cdot 3 \cdot$  exprime que la droite  $x = \frac{9}{2}$  coupe le premier squelette en deux points d'ordonnées 1 et 4, coupe le second squelette en un point d'ordonnée 3 et le troisième squelette en un point d'ordonnée 6 comme on peut le voir sur la figure 3.5 ci-dessous.

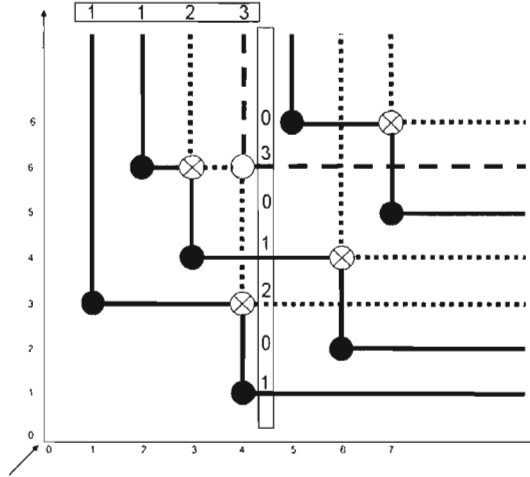


Figure 3.5 Le mot  $1 \cdot 21 \cdot 3 \cdot$  et le mot 1123 vus à travers les squelettes de  $\sigma$ .

En général, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 18** Soient  $\sigma = \sigma(1) \cdots \sigma(n) \in \mathcal{S}_n$  et pour tout  $i \in [n]$ ,  $\tau_i = \tau_i(1) \cdots \tau_i(n)$  est la quasi-permutation de l'ensemble  $[n]$  définie par

$$\tau_i(j) = 0 \text{ si } j \notin [i] \text{ et } \tau_i(j) = \sigma(j) \text{ si } j \in [i].$$

Pour tout  $i \in [n]$  : la  $i$ -ème lettre du mot  $\mathcal{I}_{\sigma(j) \dots \sigma(n)}(0^n)$  est 0 si et seulement s'il n'existe pas une ligne saillante de  $\tau_j$  qui a une  $y$ -coordonnée égale à  $i$  et cette  $i$ -ème lettre est  $k$  si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L_j^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\tau_j)$  telle que  $y_{L_j^{k-1}} = i$ . Pour tout  $i \in [j]$  : la  $i$ -ème lettre du mot  $\prod_{i=1}^j E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1) \dots \sigma(i-1)}(0^i))$  est  $k$  si et seulement s'il existe une ligne saillante  $L_j^{k-1}$  de  $Sq^{k-1}(\tau_j)$  telle que  $x_{L_j^{k-1}} = i$ .

On peut montrer cette proposition par récurrence sur  $i$ . Notons que cette proposition est donnée dans (Viennot, 1977) d'une manière équivalente par les identités (17) et (18)

dont la preuve découle d'une application itérée du lemme 3.2, donné dans (Viennot, 1977), aux squelettes successifs de  $\sigma$ .

Par exemple pour  $\sigma = 3641725 \in \mathcal{S}_7$ , on a

$$\tau_1 = 3000000, \tau_2 = 3600000, \tau_3 = 3640000, \tau_4 = 3641000, \tau_5 = 3641700, \tau_6 = 3641720 \text{ et } \tau_7 = \sigma.$$

Il est clair d'après cette correspondance de Viennot que :

$$\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(4)}(0^n) = 1021030 \text{ et que } \prod_{i=1}^4 E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^7)) = 1123.$$

Pour obtenir le mot  $\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(4)}(0^n) = 1021030$ , il suffit d'étiqueter chaque demi-droite horizontale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\tau_4)$  par  $(p+1)$  et ceci du bas vers le haut et lorsqu'il n'y a pas de ligne saillante on met un 0; voir la figure 3.5 ci-dessus. Pour obtenir le mot  $\prod_{i=1}^4 E_{\sigma(i)}(\mathcal{I}_{\sigma(1)\dots\sigma(i-1)}(0^7)) = 1123$ , il suffit d'étiqueter chaque demi-droite verticale d'une ligne saillante de  $Sq^p(\tau_4)$  par  $(p+1)$  et ceci de la gauche vers la droite, voir la figure 3.5 ci-dessus.

Maintenant, nous donnerons la preuve de la proposition 17 précédente. Viennot dans (Viennot, 1977) a montré que  $\pi(\sigma) = (u, v) \Leftrightarrow \pi(\sigma^{-1}) = (v, u)$  en utilisant la symétrie de sa construction donnée à la section 1.6. Nous allons aussi utiliser cette symétrie d'une manière un peu différente pour montrer cette proposition.

### Preuve

Il suffit de montrer que pour tous  $i, k \in [n]$  :

$$H_{v_i}(\mathcal{D}_{v_{i+1}\dots v_n}(u)) = k \Leftrightarrow H_{u_k}(\mathcal{D}_{u_{k+1}\dots u_n}(v)) = i.$$

Ceci est équivalent à montrer que si  $\mathcal{D}_{v_i v_{i+1}\dots v_n}(u)$  est obtenu de  $\mathcal{D}_{v_{i+1}\dots v_n}(u)$  en remplaçant une suite  $1, \dots, v_i - 1, v_i$  par la suite  $0, \dots, v_i - 2, v_i - 1$  et que la lettre dans  $\mathcal{D}_{v_{i+1}\dots v_n}(u)$  qui est égale à 1 et qui est devenue 0 est la  $k$ -ème lettre, alors ceci est équivalent au fait que  $\mathcal{D}_{u_k u_{k+1}\dots u_n}(v)$  est obtenu de  $\mathcal{D}_{u_{k+1}\dots u_n}(v)$  en remplaçant une suite  $1, \dots, u_k - 1, u_k$  par la suite  $0, \dots, u_k - 2, u_k - 1$  et que la lettre dans  $\mathcal{D}_{u_{k+1}\dots u_n}(v)$  qui est égale à 1 et qui est devenue 0 est la  $i$ -ème lettre. Posons  $H_u(v) = \sigma$ . On a vu que

les mots  $\mathcal{D}_{v_i v_{i+1} \dots v_n}(u)$  et  $\mathcal{D}_{v_{i+1} \dots v_n}(u)$  sont donnés respectivement par les points d'intersection des droites  $x = i - \frac{1}{2}$  et  $x = i + \frac{1}{2}$  avec les squelettes successifs de  $\sigma$ . Comme la construction de Viennot est symétrique, alors les mots  $\mathcal{D}_{u_k u_{k+1} \dots u_n}(v)$  et  $\mathcal{D}_{u_{k+1} \dots u_n}(v)$  sont donnés par les points d'intersection des droites  $y = k - \frac{1}{2}$  et  $y = k + \frac{1}{2}$  avec les squelettes successifs de  $\sigma$ . Comme  $\sigma(i) = k$ , alors forcément la droite  $x = i + \frac{1}{2}$  coupe  $Sq^1(\sigma)$  en un point d'ordonnée  $k$  alors que la droite  $x = i - \frac{1}{2}$  ne le coupe pas. Ceci est équivalent au fait que la lettre dans  $\mathcal{D}_{v_i v_{i+1} \dots v_n}(u)$  qui est égale à 1 et qui est devenue 0 dans  $\mathcal{D}_{v_{i+1} \dots v_n}(u)$  est la  $k$ -ème lettre. La construction de Viennot illustrée sur la figure ci-dessous montre que la droite  $y = k + \frac{1}{2}$  coupe  $Sq^1(\sigma)$  en un point d'abscisse  $i$ , alors que la droite  $y = k - \frac{1}{2}$  ne le coupe pas. Ceci est équivalent au fait que la lettre dans  $\mathcal{D}_{u_{k+1} \dots u_n}(v)$  qui est égale à 1 et qui est devenue 0 dans  $\mathcal{D}_{u_k u_{k+1} \dots u_n}(v)$  est la  $i$ -ème lettre.

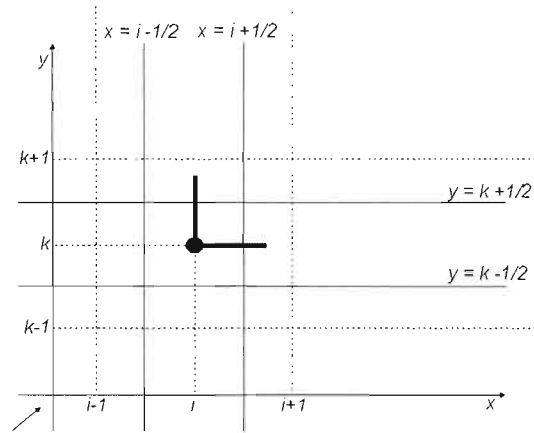


Figure 3.6 Une partie de  $Sq^1(\sigma)$  avec  $\sigma(i) = k$ .

□



## CHAPITRE IV

### SUR L'ALGORITHME DE ROBINSON

Dans ce chapitre, nous donnerons des rappels sur l'algorithme de Robinson (Robinson, 1938). Cet algorithme transforme un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{L}(w)$ . Nous présenterons aussi un deuxième algorithme de Robinson relié à son premier algorithme. Ce dernier permet d'associer à chaque mot  $w$  un opérateur formel qu'on note par  $\mathcal{B}_w$ . Dans le cas où  $w$  est une permutation, Robinson a utilisé l'opérateur  $\mathcal{B}_w$  pour associer à la permutation  $w$  un autre mot de Yamanouchi autre que  $\mathcal{L}(w)$  qu'on note par  $\mathcal{B}(w)$  et qui est de même forme que  $\mathcal{L}(w)$ . Ensuite, nous donnerons le résultat de M. A. A. van Leeuwen qui donne une description précise de la relation entre l'algorithme de Robinson  $\sigma \mapsto (\mathcal{L}(\sigma), \mathcal{B}(\sigma))$  et l'algorithme de Schensted  $\sigma \mapsto (P(\sigma), Q(\sigma))$  (van Leeuwen, 1992). Notre directeur de recherche C. Reutenauer a conjecturé que si on identifie un mot  $w$  à un tableau gauche standard  $g$ , alors

$$\omega(J(g)) = \mathcal{L}(w)$$

où  $\omega(J(g))$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $J(g)$  qui est le redressé de  $g$ . Afin de donner une preuve de cette conjecture, nous allons élaborer un algorithme de redressement d'un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi. Cet algorithme transforme le mot  $w$  en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{F}(w)$ . Il est compatible avec l'algorithme de redressement d'un tableau gauche standard donné au chapitre 1. En effet, en identifiant le mot  $w$  à un tableau gauche standard  $g$ , le mot  $\mathcal{F}(w)$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $J(g)$ , c'est-à-dire

$\mathcal{F}(w) = \omega(J(g))$ . Nous allons montrer que le mot  $\mathcal{F}(w)$  est unique. Plus précisément, nous montrerons (Théorème 8) que

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w). \quad (4.1)$$

Ce qui donne une preuve de la conjecture de C. Reutenauer précédente. Ce résultat principal et le résultat précédent de M. A. A. van Leeuwen montrent que le lien est étroit entre les algorithmes de Robinson, l'algorithme de Schensted et l'algorithme du jeu de taquin de Schützenberger. Nous utiliserons le lien entre cet algorithme de redressement et l'algorithme d'évacuation élaboré au chapitre 3 pour montrer facilement le théorème de Schützenberger suivant (Proposition 23) : si  $t$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments, alors pour tout  $k \in [n]$  :

$$ev(J(st(t| [n - k + 1, n]))) = (ev(t))| [k],$$

où

$$J(st(t| [n - k + 1, n]))$$

dénote le redressé du tableau gauche standard  $st(t| [n - k + 1, n])$  à  $k$  éléments. Rappelons que le tableau  $st(t| [n - k + 1, n])$  est obtenu du tableau  $t| [n - k + 1, n]$  en soustrayant  $n - k$  à chacun de ses éléments. Nous généraliserons le résultat de M. A. A. van Leeuwen des permutations aux mots arbitraires. Cette généralisation nous permettra de résoudre un problème ouvert posé par Thomas ((Thomas, 1976), page 667) il s'agit de trouver le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  (Théorème 12). En utilisant l'identité (4.1) précédente et les résultats du chapitre 2 sur la standardisation, nous montrerons que pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$ , on a (Propositions 26 et 27) :

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(st_d(w)), \mathcal{L}(w^*) = \left( (\mathcal{L}(st_g(w)))^T \right)^{ev} \text{ et } \mathcal{L}(w^{\text{compl}}) = (\mathcal{L}(st_g(w)))^T.$$

Nous donnerons une expression de l'évacué d'un mot de Yamanouchi  $w$  en utilisant l'opérateur de Robinson  $w \mapsto \mathcal{L}(w)$  (Théorème 13). Ensuite, nous utiliserons cette expression pour montrer le résultat ((van Leeuwen, 1992), lemme 6.3, page 36) bien connu suivant (Corollaire 7) : si deux tableaux de Young standards  $T$  et  $S$  de même forme  $\lambda \vdash n$

coincident dans les positions des  $k$  plus grands éléments  $n - k + 1, \dots, n$ , pour un certain  $k \in [n]$ , alors  $ev(T)$  et  $ev(S)$  coincident dans les positions des  $k$  plus petits éléments  $1, \dots, k$ . Finalement, nous donnerons une nouvelle formule (Proposition 28) pour la correspondance de Schensted en utilisant l'algorithme de redressement précédent. Nous utiliserons cette formule pour montrer le résultat connu suivant : pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  :  $P(\sigma^*) = P^T(\sigma)$ ,  $Q(\sigma^*) = Q^T(w_{0,n} \circ \sigma \circ w_{0,n})$ ,  $P(\sigma^{\text{compl}}) = P^T(w_{0,n} \circ \sigma \circ w_{0,n})$  et  $Q(\sigma^{\text{compl}}) = Q^T(\sigma)$ .

## 4.1 Algorithme de Robinson

Robinson (Robinson, 1938), en se basant sur un travail de Littlewood (Littlewood, 1934), a construit un algorithme qu'il a appelé «association  $I$ » permettant de transformer un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{L}(w)$ . Il a aussi construit un deuxième algorithme qu'il a appelé «association  $II$ » permettant d'associer à  $w$  un opérateur formel qu'on note par  $\mathcal{B}_w$  de la forme

$$C_{12}^{\alpha_{12}} C_{13}^{\alpha_{13}} C_{23}^{\alpha_{23}} \dots C_{(r-1)r}^{\alpha_{(r-1)r}} = \prod_{j \in \{2, \dots, r\} \text{ et } i \in [j-1]} C_{ij}^{\alpha_{ij}},$$

où  $r$  est la plus grande lettre de  $w$  et  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{(r-1)r}$  sont des entiers positifs ou nuls.

Voici une description de l'algorithme de Robinson qui transforme un mot quelconque  $w$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  :

Notons par  $R(k)$  l'opérateur qui transforme un mot  $w$  en un mot  $w'$  en remplaçant une lettre égale à  $k$  dans  $w$  en la lettre  $k - 1$ . Lorsque  $w$  contient plusieurs lettres égales à  $k$ , l'opérateur  $R(k)$  transforme la lettre  $k$  qui a le plus grand indice en la lettre  $k - 1$ . Lorsque  $w$  contient plusieurs lettres égales à  $k$  qui ont le même indice qui est le plus grand parmi les indices de toutes les lettres égales à  $k$  dans  $w$ , l'opérateur  $R(k)$  transforme la première lettre  $k$  qui a le plus grand indice, c'est-à-dire celle qui est située complètement à gauche, en la lettre  $k - 1$ .

Lorsqu'on applique l'opérateur  $R(k)$  à un mot  $w$  et on obtient un mot  $w'$ , on écrit  $w' = R_k(w)$  et on appelle cette opération une réduction de type  $R(k)$ .

L'algorithme de Robinson consiste à appliquer un certain nombre de réductions de type  $R(k)$  à un mot  $w$  pour obtenir le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$ . Supposons que  $w$  n'est pas un mot de Yamanouchi et que  $r$  est la plus grande lettre de  $w$ . Robinson a donné une manière structurée pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  en appliquant à  $w$  des réductions de type  $R(k)$  d'une manière bien déterminée en suivant des étapes qu'on note par  $(Y[2])$ ,  $(Y[3])$ ,  $\dots$ ,  $(Y[r])$  comme suit :

**(Y[2]) :** On vérifie si le mot qu'on a est un mot de Yamanouchi sur  $[2]$ . Si oui, alors on passe à l'étape  $(Y[3])$  ci-dessous. Sinon, on lui applique une réduction  $R(2)$  et on revient à l'étape  $(Y[2])$ .

**(Y[3]) :** On a un mot qui est un mot de Yamanouchi sur  $[2]$ . On vérifie si le mot qu'on a est un mot de Yamanouchi sur  $[3]$ . Si oui, alors on passe à l'étape  $(Y[4])$  ci-dessous. Sinon, on lui applique une réduction  $R(3)$  et on revient à l'étape  $(Y[2])$ .

On continue ce processus en effectuant les étapes  $(Y[4])$  jusqu'à la dernière étape  $(Y[r])$  et on obtient un mot de Yamanouchi sur  $[r]$  qu'on note par  $\mathcal{L}(w)$ .

Thomas a montré dans (Thomas, 1977) que le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  est unique. Plus précisément, il a montré que si en appliquant n'importe quelle suite de réductions de type  $R(k)$ , pas nécessairement comme le fait Robinson, à un mot et on obtient un mot de Yamanouchi, alors ce dernier est toujours égal à  $\mathcal{L}(w)$ . Il a aussi remarqué que le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  est toujours constant et il est égal à  $\deg(w) - \deg(\mathcal{L}(w))$  où  $\deg(w)$  est la somme des lettres de  $w$ . Il a posé les deux questions suivantes :

**Question 1 :** Quel est le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$ .

**Question 2 :** Quel est le nombre de suites de réductions de type  $R(k)$  possibles pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$ .

Nous allons donner une réponse à la question 1 à la fin de la section 4.5 de ce chapitre



alors que la question 2 reste toujours un problème ouvert.

Par exemple, si  $w = 231124313$ , alors  $\mathcal{L}(w) = 121123312$ . Ci-dessous, le calcul de  $\mathcal{L}(w)$  par la méthode de Robinson

$$\begin{array}{cccccccccc}
 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 3 & \\
 \downarrow & & & & & & & & & R(2) \\
 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 3 & \\
 & & & & & & & & \downarrow & R(3) \\
 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\
 & & & & \downarrow & & & & & R(3) \\
 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\
 & & & & & & \downarrow & & & R(4) \\
 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 &
 \end{array}$$

On peut aussi obtenir  $\mathcal{L}(w)$  de  $w$  comme suit :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 3 & \\
 & & & & & & & & \downarrow & R(3) \\
 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\
 \downarrow & & & & & & & & & R(2) \\
 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\
 & & & & \downarrow & & & & & R(3) \\
 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\
 & & & & & & \downarrow & & & R(4) \\
 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 &
 \end{array}$$

On peut remarquer qu'on a appliqué les quatres réductions suivantes  $R(2)$ ,  $R(3)$ ,  $R(3)$  et  $R(4)$  selon les deux suites  $R(2)$ ,  $R(3)$ ,  $R(3)$ ,  $R(4)$  et  $R(3)$ ,  $R(2)$ ,  $R(3)$ ,  $R(4)$ .

On peut remarquer aussi que

$$\begin{aligned}
 \deg(w) - \deg(\mathcal{L}(w)) &= \deg(231124313) - \deg(121123312) \\
 &= 20 - 16 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Remarquons qu'en utilisant le résultat de Thomas précédent et l'identité (4.1) précédente, on peut montrer que le redressé d'un tableau gauche standard est un tableau de Young standard unique. En effet, soit  $g$  un tableau gauche standard tel que  $\omega_g(g) = w$ . Le redressé de  $g$ , qu'on note par  $J(g)$ , est unique car

$$\omega(J(g)) = \mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w).$$

Remarquons aussi que si on suppose que le redressé d'un tableau gauche standard est un tableau de Young standard unique, alors on peut obtenir le résultat de Thomas en utilisant l'identité (4.1) précédente. En effet, en identifiant le mot  $w$  à un tableau gauche standard  $g$  tel que  $\omega_g(g) = w$ , on peut déduire que le mot de Yamanouchi  $\mathcal{F}(w)$  est unique car  $\mathcal{F}(w) = \omega(J(g))$  et  $J(g)$  est unique. Comme  $\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w)$ , alors  $\mathcal{L}(w)$  est aussi unique.

**Définition 55** (Robinson, 1938) *Robinson, en calculant  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$ , a associé à  $w$  un opérateur formel qu'on note par  $\mathcal{B}_w$  comme suit :*

*À chaque réduction  $R(2)$ , on associe l'opérateur  $C_{12}$ .*

*À chaque réduction  $R(3)$ , on associe l'opérateur  $C_{23}$  si cette réduction transforme une lettre 3 en une lettre 2 tout en gardant la propriété que le mot obtenu soit un mot de Yamanouchi sur  $[2]$ . Si on perd la propriété que le mot obtenu soit un mot de Yamanouchi sur  $[2]$  et on doit lui appliquer une réduction  $R(2)$ , alors on lui associe l'opérateur  $C_{13}$ .*

*D'une manière similaire, à chaque réduction  $R(4)$  on associe l'un des opérateurs  $C_{34}$ ,  $C_{24}$  ou  $C_{14}$  selon les réductions nécessaires qu'on doit appliquer au mot obtenu.*

*En général, à chaque réduction  $R(k)$ , on associe l'un des opérateurs  $C_{(k-1)k}$ ,  $C_{(k-2)k}$ ,  $\dots$ ,  $C_{2k}$  ou  $C_{1k}$  selon les réductions nécessaires qu'on doit appliquer au mot obtenu.*

*L'opérateur formel associé à  $w$  est*

$$\mathcal{B}_w = C_{12}^{\alpha_{12}} C_{13}^{\alpha_{13}} C_{23}^{\alpha_{23}} \dots C_{(r-1)r}^{\alpha_{(r-1)r}} = \prod_{j \in \{2, \dots, r\} \text{ et } i \in [j-1]} C_{ij}^{\alpha_{ij}},$$

où  $r$  est la plus grande lettre de  $w$  et  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{(r-2)r}$  et  $\alpha_{(r-1)r}$  sont des entiers positifs ou nuls.

Dans l'exemple donné ci-haut, l'opérateur formel associé à  $w$  est  $C_{12}C_{23}^2C_{34}$ .

Dans le cas particulier où  $w \in \mathcal{S}_n$ , Robinson a montré qu'on peut associer à  $w$  deux mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . Le premier mot de Yamanouchi est  $\mathcal{L}(w)$  et le deuxième mot de Yamanouchi, qu'on note par  $\mathcal{B}(w)$ , est de la même forme que  $\mathcal{L}(w)$  et il est défini à partir de l'opérateur  $\mathcal{B}_w$  donné dans la définition précédente. Ainsi, il a associé à chaque permutation  $w \in \mathcal{S}_n$  une paire  $(\mathcal{L}(w), \mathcal{B}(w))$  de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ . Il a indiqué que cette correspondance est bijective. Autour des années 60, Schensted a trouvé une bijection analogue : il a associé à chaque permutation  $w \in \mathcal{S}_n$ , une paire  $(P(w), Q(w))$  de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$  (Schensted, 1961).

Remarquons que dans le cas particulier  $w \in \mathcal{S}_n$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ , un opérateur de la forme  $C_{i',i}^{\alpha_{i',i}}$  avec  $i' \in [i-1]$  et  $0 \leq \alpha_{i',i} \leq 1$  apparaît dans l'expression de  $\mathcal{B}_w$  une seule fois. On obtient le mot  $\mathcal{B}(w)$  à partir de l'opérateur  $\mathcal{B}_w$  comme suit :

On prend le mot  $12 \cdots n$  et on remplace chaque  $i \in \{2, \dots, n\}$  par  $i'$  si  $\alpha_{i',i} = 1$  et par  $i$  si  $\alpha_{i',i} = 0$ .

Par exemple, soit  $\sigma = 53142$  une permutation de l'ensemble  $[5]$ . Calculons  $\mathcal{L}(\sigma)$  et  $\mathcal{B}(\sigma)$ . En effet, en appliquant respectivement les réductions  $R(3)$ ,  $R(2)$ ,  $R(4)$ ,  $R(3)$ ,  $R(5)$ ,  $R(4)$ ,  $R(3)$  et  $R(2)$  selon la méthode de Robinson, on obtient :

5	<b>3</b>	1	4	2
5	<b>2</b>	1	4	2
5	<b>1</b>	1	<b>4</b>	2
5	1	1	<b>3</b>	2
<b>5</b>	1	1	<b>2</b>	2
<b>4</b>	1	1	2	2

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{3} & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\mathbf{2} & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

Ainsi,  $\mathcal{L}(\sigma) = 11122$  et  $\mathcal{B}_\sigma = C_{13}^1 C_{24}^1 C_{15}^1$ . Le mot  $\mathcal{B}(\sigma)$  est obtenu du mot 12345, en remplaçant 1 par 1, 2 par 2, 3 par 1, 4 par 2 et 5 par 1. Ce qui implique que  $\mathcal{B}(\sigma) = 12121$ .

Maintenant, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 19** *Pour tout mot  $u \in \mathbb{P}^*$  et  $a \in \mathbb{P}$ , on a*

$$\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(u)c \text{ avec } c \leq a.$$

### Preuve

À chaque mot  $u$ , on associe un poids  $\deg(u)$  qui est la somme des lettres de  $u$ .

On procède par récurrence sur le poids  $\deg(u)$ .

Pour  $\deg(u) = 1$  :

Il est clair que  $\deg(u) = 1$ , implique que  $u = 1$  et donc  $\mathcal{L}(u) = 1$ . Ainsi si  $a = 1$ , alors  $\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(11) = 11 = \mathcal{L}(u)1 = \mathcal{L}(u)a$  et il suffit de prendre  $c = a$  et si  $a > 1$ , alors  $\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(1a) = 12 = \mathcal{L}(u)2$  et il suffit de prendre  $c = 2 \leq a$ .

Supposons que cette propriété est vraie pour tout  $u$  tel que  $\deg(u) \leq n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $u$  tel que  $\deg(u) = n + 1$ .

Pour passer du mot  $ua$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(ua)$ , on applique au mot  $ua$  un certain nombre de réductions de type  $R(k)$  et chaque réduction transforme une lettre  $k$  en la lettre  $k - 1$ . Parmi toutes ces réductions, considérons la réduction qui a transformé pour la première fois une lettre  $k$  du mot  $u$  en la lettre  $k - 1$ . On distingue deux cas :

Premier cas : Cette réduction n'existe pas, c'est-à-dire que toutes les réductions pour passer de  $ua$  vers  $\mathcal{L}(ua)$  ont transformé à chaque fois la dernière lettre du mot correspondant. Supposons que le nombre de toutes ces réductions est  $k$ . La 1<sup>ère</sup> réduction

transforme la lettre  $a$  en la lettre  $a - 1$ , la 2<sup>ème</sup> réduction transforme la lettre  $a - 1$  en la lettre  $a - 2$  et la  $k^{\text{ème}}$  réduction transforme la lettre  $a - k + 1$  en la lettre  $a - k$ . Donc

$$\mathcal{L}(ua) = u(a - k)$$

qui est un mot de Yamanouchi. Comme le préfixe d'un mot de Yamanouchi est un mot de Yamanouchi, alors  $u$  est un mot de Yamanouchi et donc  $\mathcal{L}(u) = u$ . Ainsi

$$\mathcal{L}(ua) = u(a - k) = \mathcal{L}(u)(a - k) \text{ et il suffit de prendre } c = a - k \leq a.$$

Deuxième cas : Supposons que cette réduction existe et qu'elle est la  $(m + 1)$ -ème réduction, c'est-à-dire que les  $m$  premières réductions ont transformé à chaque fois la dernière lettre du mot correspondant. On peut déduire que la dernière lettre après la  $m$ -ème réduction est  $a - m$ . Par conséquent,

$$\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(u(a - m)) = \mathcal{L}(u'(a - m))$$

où  $u'$  est obtenu de  $u$  en lui appliquant la  $(m + 1)$ -ème réduction, c'est-à-dire que  $u'$  est obtenu de  $u$  en transformant une lettre  $k$  de  $u$  en la lettre  $k - 1$ .

Comme  $\deg(u') = \deg(u) - 1 = n$ , alors par l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(u'(a - m)) = \mathcal{L}(u')c \text{ avec } c \leq a - m \leq a.$$

Montrons que  $\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(u)$ . Il suffit de montrer que la  $(m + 1)$ -ème réduction précédente appliquée au mot  $u(a - m)$  pour obtenir le mot  $u'(a - m)$  peut être prise comme première réduction parmi toutes les réductions appliquées au mot  $u$  pour obtenir  $\mathcal{L}(u)$ , ce qui implique que

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u').$$

En effet, on peut distinguer les deux cas suivants :

Si  $k < a - m$  ou  $k \geq a - m + 2$ , alors la  $(m + 1)$ -ème réduction précédente peut être prise comme première réduction parmi toutes les réductions appliquées au mot  $u$  pour obtenir  $\mathcal{L}(u)$  car dans ce cas cette réduction n'est pas liée à la dernière lettre  $a - m$ .

Si  $k = a - m$ , alors  $k$  est la première lettre du mot  $u(a - m)$  qui a le plus grand indice de toutes ses lettres qui sont égales à  $a - m$ . Comme l'indice d'une lettre dépend seulement des lettres situées à sa gauche et ne dépend pas des lettres situées à sa droite, alors  $k$  est aussi la première lettre du mot  $u$  qui a le plus grand indice de toutes les lettres de  $u$  qui sont égales à  $a - m$ . Ainsi on peut appliquer la réduction  $R(a - m)$  à  $u$  pour obtenir  $u'$ .

Si  $k = a - m + 1$ , alors  $k$  est la première lettre du mot  $u(a - m)$  qui a le plus grand indice de toutes ses lettres qui sont égales à  $a - m + 1$ . Comme l'indice d'une lettre dépend seulement des lettres situées à sa gauche et ne dépend pas des lettres situées à sa droite, alors  $k$  est aussi la première lettre du mot  $u$  qui a le plus grand indice de toutes les lettres de  $u$  qui sont égales à  $a - m + 1$ . Ainsi on peut appliquer la réduction  $R(a - m + 1)$  à  $u$  pour obtenir  $u'$ .

Par conséquent,

$$\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(u'(a - m)) = \mathcal{L}(u')c = \mathcal{L}(u)c.$$

□

À la fin de la section 4.4 de ce chapitre, nous donnerons une proposition (proposition 24) plus générale que cette proposition.

## 4.2 Résultat de M. A. A. van Leeuwen donnant le lien entre l'algorithme de Robinson et l'algorithme de Schensted (insertion colonne)

D. E. Knuth est le premier qui a mentionné dans (Knuth, 1970) qu'il y a une connexion entre l'algorithme de Robinson et celui de Schensted, observation qu'il a attribuée à Schützenberger. M. A. A. van Leeuwen, dans ((van Leeuwen, 1992), proposition 7.2), a donné une description précise de cette relation. Plus précisément, il a montré que :

**Proposition 20** Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  :

$$\mathcal{L}(\sigma) = \omega \left( (Q(\sigma))^T \right) \text{ et } \mathcal{B}(\sigma) = \omega \left( (P(\sigma))^T \right).$$

On a vu dans l'exemple donné à la fin de la section 4.1 précédente avec  $\sigma = 53142 \in \mathcal{S}_5$ , que  $\mathcal{L}(\sigma) = 11122$  et que  $\mathcal{B}(\sigma) = 12121$ . On a

$$\omega \left( (Q(\sigma))^T \right) = \omega \left( \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right)^T \right) = \omega \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right)^T = (12312)^T = 11122 = \mathcal{L}(\sigma)$$

et

$$\omega \left( (P(\sigma))^T \right) = \omega \left( \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)^T \right) = \omega \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)^T = (11223)^T = 12121 = \mathcal{B}(\sigma).$$

M. A. A. van Leeuwen a généralisé la correspondance entre les mots de Yamanouchi et les tableaux de Young standards à une correspondance entre les mots et les arrangements comme on l'a déjà vu à la section 2.3 précédente. Ensuite, il a traduit la méthode de Robinson donnée à la section 4.1 précédente sur les mots à une méthode équivalente sur les arrangements. La méthode de Robinson transforme un mot  $w$  en un mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  et la méthode correspondante de van Leeuwen transforme l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  en un tableau de Young standard qu'on note par  $t_w$  tel que  $\omega(t_w) = \mathcal{L}(w)$ . Dans toute la suite de cette thèse, on dit sans distinction que le tableau de Young standard  $t_w$  est obtenu de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  par la méthode de Robinson ou par la méthode de van Leeuwen.

On associe à chaque entier  $k$  qui occupe le case  $(i, j)$  avec  $i > 1$  dans l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  une quantité qu'on appelle *une saillie (overhang)* qu'on note par  $s_w(k)$  définie comme suit :

$$s_w(k) = j - (\# < k)_{i-1}$$

où  $(\# < k)_{i-1}$  dénote le nombre des entiers strictement inférieurs à  $k$  dans la ligne  $i - 1$ .

La saillie  $s_w(k)$  est égale à l'indice de la  $k$ -ème lettre de  $w$ . En effet, il suffit de remarquer que la lettre  $i$  est la  $k$ -ème lettre de  $w$  et que  $|pref_k(w)|_i = j$  et  $|pref_k(w)|_{i-1} = (\# < k)_{i-1}$ .

Par exemple, pour  $w = 231124313$ , on a :

$$\mathbf{a}_w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 2 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}.$$

Comme l'entier 7 occupe la case  $(3, 2)$  dans l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  et comme  $(\# < 7)_2 = 2$  car le nombre des entiers strictement inférieurs à 7 dans la deuxième ligne de  $\mathbf{a}_w$  est 2, alors

$$s_w(7) = 2 - 2 = 0.$$

Ceci correspond à l'indice de la 7-ème lettre de  $w$ . En effet, l'indice de cette lettre qui est 3 est

$$|2311243|_3 - |2311243|_2 = 2 - 2 = 0.$$

Notons que  $\mathbf{a}_w$  est un tableau de Young standard si et seulement si  $s_w(k) \leq 0$  pour tout  $k \in [n]$ .

Rappelons que dans le cas particulier où  $w$  est une permutation de l'ensemble  $[n]$ , l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  est constitué de lignes non vides consécutives de longueur 1. En lisant les lettres dans  $\mathbf{a}_w$  de la première ligne jusqu'à la dernière ligne, on obtient  $w^{-1}$ . Dans ce cas,  $0 \leq s_w(k) \leq 1$  pour tout  $k \in [n]$ .

Remarquons que lorsqu'on applique l'algorithme de Robinson «association  $I$ » à  $w$  pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$ , on lui applique un certain nombre de réductions de type  $R(k)$  et chaque réduction de type  $R(k)$  transforme une certaine lettre  $k$  de  $w$  en la lettre  $k - 1$ . Dans  $\mathbf{a}_w$ , une réduction de type  $R(k)$  correspond à déplacer un entier de la ligne  $k$  vers



la ligne  $k - 1$ . Lorsqu'on applique un certain nombre de réductions de type  $R(k)$  à  $w$  pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$ , ceci correspond à déplacer des entiers dans l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  pour obtenir le tableau de Young standard  $t_w$  tel que  $\omega(t_w) = \mathcal{L}(w)$ .

M. A. A. van Leeuwen a remarqué que Robinson transforme un mot  $w$  en le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  en répétant la procédure suivante qu'on va appeler la procédure de Robinson :

- *En premier, on cherche la plus petite lettre dans  $w$  ayant un indice strictement positif. Soit  $i$  cette lettre telle que  $i \geq 1$ .*
- *Ensuite, on cherche parmi toutes les lettres de  $w$  égales à  $i$  la première lettre  $i$  située le plus à gauche. Soit  $k$  la position de cette lettre  $i$ . Donc  $i = w_k$ . On peut déduire que le mot, qu'on note par  $w'$ , obtenu de  $w$  en supprimant toutes ses lettres sauf celles appartenant à  $[i - 1]$  ainsi que celles égales à  $i$  et qui sont situées dans  $\text{préf}_{k-1}(w)$  est un mot de Yamanouchi car chaque lettre de ce mot a un indice négatif ou nul. Soit  $|\text{préf}_k(w)|_i = j$ .*
- *On transforme la lettre  $w_k$  égale à  $i$  en la lettre  $i - 1$ . On note le mot obtenu par  $R_i(w)$ . La  $k$ -ème lettre du mot  $R_i(w)$  est égale à  $i - 1$  et son indice est égal à*

$$(|\text{préf}_k(w)|_{i-1} + 1) - |\text{préf}_k(w)|_{i-2}$$

*et il est inférieur ou égal à 1. En effet,  $|\text{préf}_k(w)|_{i-1} \leq |\text{préf}_k(w)|_{i-2}$  puisque  $w'$  est un mot de Yamanouchi. On peut remarquer aussi que*

$$\begin{aligned} |\text{préf}_k(R_i(w))|_{i-1} &= |\text{préf}_k(w)|_{i-1} + 1 \\ &= j - ((|\text{préf}_k(w)|_i - |\text{préf}_k(w)|_{i-1}) - 1) \\ &= |\text{préf}_k(w)|_i - (i_{w_k}(w) - 1). \end{aligned}$$

*Toutes les lettres égales à  $i - 1$  dans  $\text{préf}_{k-1}(w)$  conservent leurs indices qui sont négatifs ou nuls. Les lettres égales à  $i - 1$  dans  $\text{suff}_{|w|-k}(w)$  leurs indices augmentent de 1 et donc deviennent inférieurs ou égaux à 1.*

• Dans le cas où le changement de la lettre  $w_k$  de  $i$  à  $i - 1$  va causer l'apparition d'un indice strictement positif qui est 1 d'une lettre égale à  $i - 1$ , cette lettre  $i - 1$  va être la  $\ell$ -ème lettre du mot  $R_i(w)$  pour un certain  $\ell \geq k$ . Si c'est le cas, la prochaine étape sera de transformer de la même manière une lettre égale à  $i - 1$  dans  $R_i(w)$  en la lettre  $i - 2$ . On continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y aura pas d'apparition d'un indice strictement positif d'une lettre inférieure ou égale à  $i$ . Supposons que ceci s'est produit pour les lettres égales à  $i'$  avec  $i' < i$ . Dans ce cas, Robinson associe un opérateur formel  $C_{i',i}$ . On peut remarquer qu'on a appliqué à  $w$  la suite de réductions de type  $R(k)$  suivante :

$$R(i), R(i - 1), \dots, R(i' + 1).$$

Par conséquent, van Leeuwen a remarqué que Robinson obtient d'une part le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  et d'autre part l'opérateur formel  $\mathcal{B}_w$  qui est une composition formelle d'opérateurs  $C_{i',i}$ .

Maintenant, nous donnons la méthode de van Leeuwen pour obtenir le tableau de Young standard  $t_w$  à partir de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$ . Il s'agit de répéter la procédure suivante qu'on va appeler aussi la procédure de Robinson car elle est obtenue de la procédure de Robinson précédente sur les mots par traduction vers les arrangements :

- En premier, on cherche la première ligne dans  $\mathbf{a}_w$  qui contient un entier ayant une saillie strictement positive. Soit  $i$  le rang de cette ligne, c'est-à-dire cette ligne est la  $i$ -ème ligne de  $\mathbf{a}_w$ .
- Ensuite, on cherche le premier entier dans la ligne  $i$  qui a la plus grande saillie strictement positive. Soit  $k$  cet entier (donc les  $i - 1$  premières lignes et la partie de la ligne  $i$  située à gauche de  $k$  ( $k$  exclu) constitue un tableau de Young standard). Soit  $(i, j)$  la case dans l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  occupée par  $k$ , c'est-à-dire que  $k$  est situé dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .
- On déplace  $k$  vers la ligne  $i - 1$ , ensuite on arrange les entiers des lignes  $i$  et  $i - 1$  de sorte qu'il ait une croissance de gauche à droite et qu'il n'y ait pas de cases vides au

milieu des lignes  $i$  et  $i-1$ . Remarquons que  $k$  dans la ligne  $i-1$  va se trouver dans la colonne  $((\# < k)_{i-1} + 1)$  qui est la colonne  $j - (s_w(k) - 1)$ . Ainsi le numéro de la colonne où se trouve  $k$  a diminué de  $s_w(k) - 1$ . Remarquons aussi qu'un tel déplacement de l'entier  $k$  fait en sorte que tous les entiers inférieurs à  $k$  dans la ligne  $i-1$  conservent leurs saillies qui sont négatives ou nulles, les entiers supérieurs à  $k$  dans la ligne  $i-1$  leurs saillies augmentent de 1 et donc leurs saillies deviennent inférieures ou égales à 1 et la saillie de  $k$  dans la ligne  $i-1$  peut changer comme elle peut ne pas changer par rapport à sa saillie dans la ligne  $i$  tout en étant inférieure ou égale à 1. En effet, la saillie de  $k$  dans la ligne  $i-1$  est  $((\# < k)_{i-1} - (\# < k)_{i-2}) + 1$  et il suffit de remarquer que  $(\# < k)_{i-1} \leq (\# < k)_{i-2}$  car les  $i-2$  premières lignes et la partie de la ligne  $i-1$  située à gauche de  $k$  ( $k$  exclu) constitue un tableau de Young standard.

- Dans le cas où le déplacement de  $k$  de la ligne  $i$  vers la ligne  $i-1$  va causer l'apparition d'une saillie strictement positive qui est 1, cette saillie va être la saillie de  $k$  ou d'un élément supérieur à  $k$ . Si c'est le cas, la prochaine étape sera de déplacer un entier de la même manière de la ligne  $i-1$  vers la ligne  $i-2$ . On continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y aura pas d'apparition d'une saillie strictement positive. Supposons que ceci s'est produit à la ligne  $i'$  avec  $i' < i$ . Dans ce cas, Robinson associe un opérateur formel  $C_{i',i}$ .

On répète cette procédure jusqu'à l'obtention d'un côté d'un tableau de Young standard, qu'on note par  $t_w$ , et d'un autre côté de l'opérateur formel  $B_w$  qui est une composition formelle d'opérateurs  $C_{i',i}$ .

Par conséquent, la méthode de van Lecuwen utilisée pour obtenir le tableau de Young standard  $t_w$  à partir de l'arrangement  $a_w$  correspond à répéter la procédure de Robinson un certain nombre de fois. Lorsqu'on applique la procédure de Robinson comme ci-dessus, on dit qu'on a appliqué la procédure de Robinson complète. Lorsqu'on se restreint à certaines premières étapes de cette procédure, on dit qu'on a appliqué la procédure de Robinson incomplète.

Dans le cas particulier  $w \in S_n$ , initialement chaque entier dans  $a_w$  a une saillie qui

n'excède pas 1 et ceci reste vrai durant tout le processus d'application de la méthode de Robinson. M. A. A. van Leeuwen a utilisé l'opérateur formel  $\mathcal{B}_w$  pour obtenir un deuxième tableau de Young standard qu'on note par  $S_w$  qui a la même forme que le premier tableau de Young standard  $t_w$  tel que  $\omega(S_w) = \mathcal{B}(w)$ . En effet, van Leeuwen a traduit la méthode de Robinson précédente permettant d'obtenir le mot de Yamanouchi  $\mathcal{B}(w)$  à partir du mot  $12 \cdots n$  en utilisant l'opérateur  $\mathcal{B}_w$  à une méthode équivalente permettant d'obtenir le tableau de Young standard  $S_w$  à partir de l'arrangement associé au mot  $12 \cdots n$  en utilisant l'opérateur  $\mathcal{B}_w$ . M. A. A. van Leeuwen a appliqué la procédure suivante :

- On range les entiers  $1, \dots, n$  dans un arrangement ayant une seule colonne qu'on note par  $a^{(n)}$  comme suit :

$$a^{(n)} = \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \vdots \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}.$$

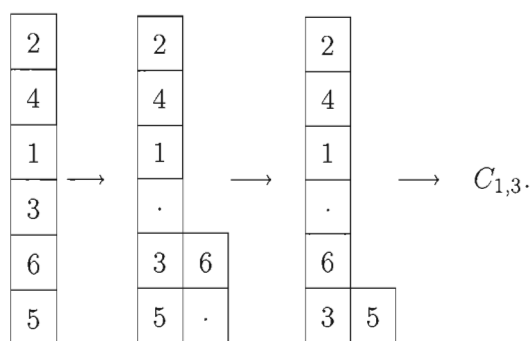
- Chaque opérateur  $C_{i',i}$  est interprété comme déplacer l'entier  $i$  de la ligne  $i$  vers la fin de la ligne  $i'$  avec  $i' < i$ . L'opérateur formel  $\mathcal{B}_w$  est interprété comme un ensemble de tels déplacements. On peut remarquer qu'après cet ensemble de déplacements les lignes obtenues sont non vides, croissantes de gauche à droite et chaque ligne n'a pas de cases vides en son milieu.

Remarquons que pour obtenir le tableau de Young standard  $t_w$ , on applique à chaque fois la procédure de Robinson. À chaque fois que la procédure de Robinson est terminée on obtient l'ajout d'une case à une certaine ligne  $i'$  à cause d'un ensemble de déplacements d'éléments de sorte que le premier déplacement a commencé d'une certaine ligne  $i$  et le dernier déplacement a terminé à la ligne  $i'$ . Cette case est la même case occupée par  $i$  en le déplaçant dans  $a^{(n)}$  de la ligne  $i$  vers la ligne  $i'$ . Donc à chaque fois la case ajoutée à une ligne est la même dans les deux procédures, ce qui implique que les deux tableaux obtenus  $t_w$  et  $S_w$  ont la même forme et ils sont des tableaux de Young standards.

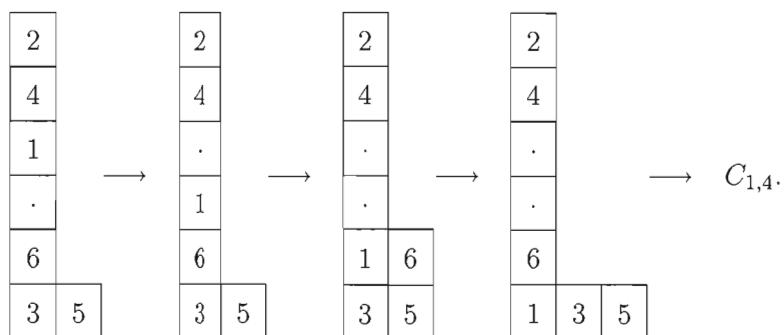
Pour mieux cerner cette description de M. A. A. van Leeuwen, on donne un exemple illustratif. Soit  $\sigma = 463512 \in \mathcal{S}_6$ . On a  $\sigma^{-1} = 563142$  et donc

$$a_\sigma = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}.$$

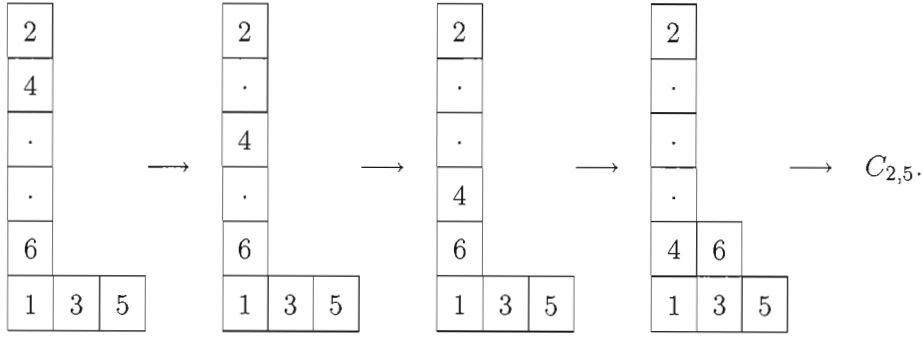
Lorsqu'on applique la procédure de Robinson, donnée ci-haut, pour la première fois, on obtient



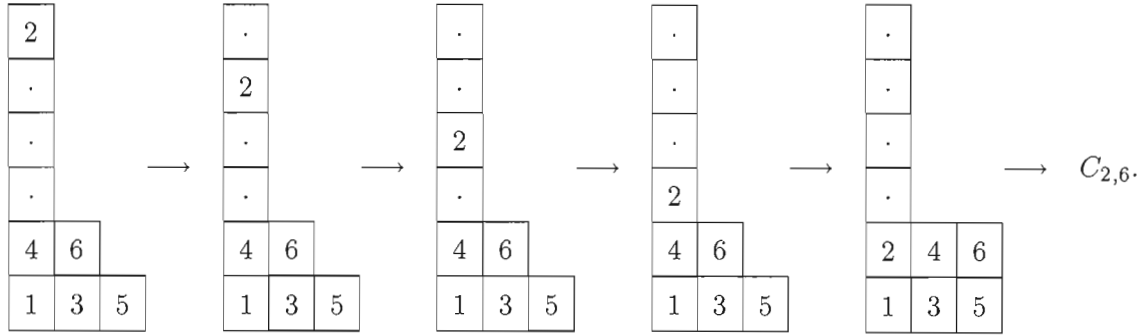
Lorsqu'on applique la procédure de Robinson pour la deuxième fois, on obtient



Lorsqu'on applique cette procédure pour la troisième fois, on obtient



Lorsqu'on applique cette procédure pour la quatrième fois, on obtient



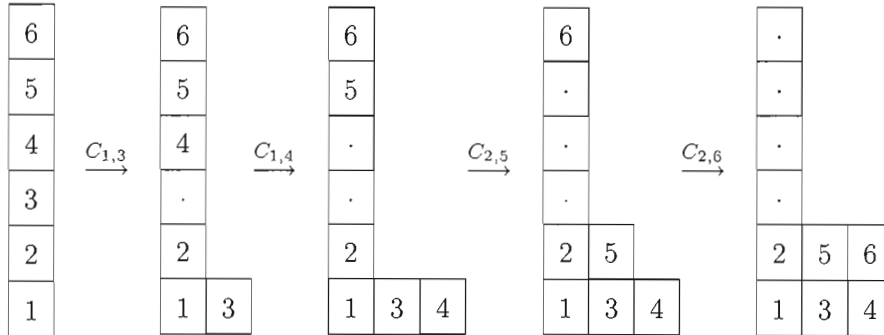
Ainsi, on obtient d'un côté le tableau de Young standard

$$t_\sigma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

et d'un autre côté la composition formelle suivante des opérateurs  $C_{i',i}$  :

$$\mathcal{B}_\sigma = C_{1,3}C_{1,4}C_{2,5}C_{2,6}.$$

L'opérateur  $\mathcal{B}_\sigma$  nous donne un deuxième tableau de Young standard comme suit :



Ainsi, le deuxième tableau de Young standard est

$$S_\sigma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Par conséquent,  $\mathcal{L}(\sigma) = \omega(t_\sigma) = 121212$  et  $\mathcal{B}(\sigma) = \omega(S_\sigma) = 121122$ .

Par l'algorithme de Schensted, on obtient que

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

On peut remarquer facilement que

$$\omega(Q^T(\sigma)) = \omega\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}\right) = 121212 = \mathcal{L}(\sigma)$$

et que

$$\omega(P^T(\sigma)) = \omega\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) = 121122 = \mathcal{B}(\sigma).$$

Notons que pour  $\sigma \in S_n$ , si l'algorithme de Schensted qui utilise l'insertion ligne lui associe la paire de tableaux  $(P(\sigma), Q(\sigma))$  et si l'algorithme de Schensted qui utilise l'insertion colonne lui associe la paire de tableaux  $(P'(\sigma), Q'(\sigma))$ , alors

$$P'(\sigma) = P^T(\sigma) \text{ et } Q'(\sigma) = Q^T(\sigma).$$

Ainsi, le résultat de van Leeuwen suivant :

$$\mathcal{L}(\sigma) = \omega\left((Q(\sigma))^T\right) \text{ et } \mathcal{B}(\sigma) = \omega\left((P(\sigma))^T\right),$$

donné par la proposition 20 précédente est équivalent au résultat suivant :

$$\mathcal{L}(\sigma) = \omega(Q'(\sigma)) \text{ et } \mathcal{B}(\sigma) = \omega(P'(\sigma)).$$

La preuve de ce résultat est donnée par la proposition suivante donné par van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1992). Par conséquent, van Leeuwen a donné d'une manière précise le lien entre l'algorithme de Robinson et l'algorithme de Schensted qui utilise l'insertion colonne qu'on note par  $I^l$ .

**Proposition 21** *Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Soit  $a_\sigma$  l'arrangement associé à  $\sigma$ . Supposons que l'application complète de la procédure de Robinson consiste à un ensemble de déplacements d'éléments de sorte que le premier déplacement commence à la ligne  $i$  et le dernier déplacement termine à la ligne  $i'$  avec  $i' < i$ . Alors les éléments des  $i$  premières lignes forment un tableau de Young standard qui est le même tableau de Young standard obtenu durant l'application de l'algorithme de Schensted qui utilise l'insertion colonne après avoir inséré les  $i$  premiers entiers.*

### Preuve

Nous allons donner les étapes principales de la preuve de cette proposition comme le fait van Leeuwen dans (van Leeuwen, 1992). En effet, remarquons que après une application complète de la procédure de Robinson qui consiste à un ensemble de déplacements d'éléments de sorte que le premier déplacement commence de la ligne  $i$  et le dernier déplacement termine à la ligne  $i'$  avec  $i' < i$ , tous les éléments des  $i$  premières lignes ont une saillie inférieure ou égale à 0, ce qui implique qu'ils forment un tableau de Young standard.

À chaque fois qu'on applique la procédure de Robinson, on commence par déplacer un certain entier  $k$  d'une certaine ligne  $i$  vers une ligne située en bas et ceci en passant à travers toute ligne vide jusqu'à ce que l'entier  $k$  atteigne le tableau de Young standard qu'on note par  $t$  construit après l'application précédente de la procédure de Robinson. M. A. A. van Leeuwen a montré qu'à partir de cette étape, poursuivre la procédure de Robinson est équivalent à appliquer l'insertion colonne  $I^t$  de Schensted de l'élément  $k$  dans le tableau  $t$ .

En premier, il a remarqué que chaque nombre qui se déplace vers une ligne précédente reste dans la même colonne car sa saillie était 1, ensuite le numéro de la colonne où il se trouve diminue par 1, c'est-à-dire reste le même. Si sa saillie est encore 1, alors il est le premier élément dans sa ligne ayant une saillie maximale, ce qui implique qu'il sera déplacé de nouveau vers la ligne précédente. Il continue de se déplacer d'une ligne à une



autre en restant dans la même colonne jusqu'à ce qu'il atteigne un élément plus petit que lui dans cette colonne ou bien il atteint le début de cette colonne. Il a remarqué aussi que tous les entiers dans les lignes situées entre la ligne où le premier déplacement a commencé et la ligne où le dernier déplacement a terminé conservent leurs positions à l'exception de certains entiers qui seront éjectés vers la droite.

M. A. A. van Leeuwen a défini inductivement pendant l'application de la procédure de Robinson certains entiers comme étant actifs. Le premier élément qui se déplace pendant l'application de la procédure de Robinson est par définition un entier actif et si un entier actif se déplace et dans sa nouvelle position sa saillie est inférieure ou égale à 0, alors l'entier situé dans la case voisine à sa droite est aussi actif. Ensuite, il a montré que la suite des entiers actifs est déterminée de la même manière que la suite des entiers qui se déplacent durant l'application de la procédure d'insertion colonne  $I^t$  de Schensted et ces entiers se déplacent vers les mêmes positions. Il a aussi montré que chaque entier non actif occupe la même position après une application de la procédure de Robinson que sa position avant l'application de cette procédure.

□

Pour compléter la comparaison entre l'algorithme de Robinson et l'algorithme de Schensted, van Leeuwen a remarqué qu'affecter un opérateur  $C_{i',i}$  est équivalent à placer l'entier  $i$  dans le tableau de droite, qu'on a noté par  $S_\sigma$ , dans la position par laquelle la forme du tableau de gauche, qu'on a noté par  $t_\sigma$ , croit suite à l'application de la procédure de Robinson commençant de la ligne  $i$  et terminant à la ligne  $i'$ . Ceci est similaire à la règle de Schensted pour construire le tableau de droite. Tenant en compte le fait que dans l'algorithme de Robinson on commence par écrire verticalement vers le haut la permutation  $\sigma^{-1}$  et en utilisant le fait que  $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$  et  $Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$ , on obtient finalement que :

Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\mathcal{L}(\sigma) = \omega(P'(\sigma^{-1})) = \omega(Q'(\sigma)) = \omega(Q^T(\sigma))$$

et

$$\mathcal{B}(\sigma) = \omega(Q'(\sigma^{-1})) = \omega(P'(\sigma)) = \omega(P^T(\sigma)).$$

Ce qui donne la preuve de la proposition 20 précédente.

Par exemple, avec la permutation  $\sigma = 463512$  donnée dans l'exemple ci-haut, on peut remarquer que : l'application de la procédure de Robinson pour la première fois, est équivalente à insérer (insertion colonne) l'entier 3 dans le tableau

6
5

tableau

6	
3	5

L'application de la procédure de Robinson pour la deuxième fois, est équivalente à insérer (insertion colonne) l'entier 1 dans le tableau

6	
3	5

6		
1	3	5

L'application de la procédure de Robinson pour la troisième fois, est équivalente à insérer (insertion colonne) l'entier 4 dans le tableau

6		
1	3	5

4	6	
1	3	5

L'application de la procédure de Robinson pour la quatrième fois, est équivalente à insérer (insertion colonne) l'entier 2 dans le tableau

4	6	
1	3	5

2	4	6
1	3	5

qui est exactement le tableau  $t_\sigma$ .

Si on remplit les cases d'un tableau de la même forme que  $t_\sigma$  par les entiers  $1, \dots, n$  selon leurs ordres d'apparition dans la chaîne de tableaux

5	6	6	6	4	6	2	4	6	
	5	3	5	1	3	5	1	3	5

on obtient le tableau 

2	5	6
1	3	4

 qui est exactement le tableau  $S_\sigma$ .

Par conséquent,

$$t_\sigma = P'(\sigma^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} = Q'(\sigma) = Q^T(\sigma)$$

et

$$S_\sigma = Q'(\sigma^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = P'(\sigma) = P^T(\sigma).$$

On peut déduire facilement la proposition suivante :

**Proposition 22** *Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma^{-1}) &= \mathcal{B}(\sigma), \quad \mathcal{B}(\sigma^{-1}) = \mathcal{L}(\sigma), \\ \mathcal{L}(\sigma^*) &= \left( (\mathcal{L}(\sigma))^T \right)^{ev}, \quad \mathcal{B}(\sigma^*) = (\mathcal{B}(\sigma))^T, \\ \mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma) &= (\mathcal{L}(\sigma))^T, \quad \mathcal{B}(\omega_{0,n} \circ \sigma) = \left( (\mathcal{B}(\sigma))^T \right)^{ev}, \\ \mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) &= (\mathcal{L}(\sigma))^{ev} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) = (\mathcal{B}(\sigma))^{ev}. \end{aligned}$$

**Preuve**

On va utiliser le fait que  $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ ,  $Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$ ,  $P(\sigma^*) = P^T(\sigma)$ ,  $Q(\sigma^*) = ev(Q^T(\sigma))$ ,  $P(\omega_{0,n} \circ \sigma) = ev(P^T(\sigma))$ ,  $Q(\omega_{0,n} \circ \sigma) = Q^T(\sigma)$ ,  $P(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) = ev(P(\sigma))$  et  $Q(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) = ev(Q(\sigma))$ .

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma^{-1}) &= \omega(Q^T(\sigma^{-1})) \\ &= \omega(P^T(\sigma)) \\ &= \mathcal{B}(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma^{-1}) &= \omega(P^T(\sigma^{-1})) \\ &= \omega(Q^T(\sigma)) \\ &= \mathcal{L}(\sigma). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\sigma^*) &= \omega(Q^T(\sigma^*)) \\
 &= \omega(\text{ev}(Q(\sigma))) \\
 &= (\omega(Q(\sigma)))^{ev} \\
 &= \left( (\omega(Q^T(\sigma)))^T \right)^{ev} \\
 &= \left( (\mathcal{L}(\sigma))^T \right)^{ev}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\sigma^*) &= \omega(P^T(\sigma^*)) \\
 &= \omega(P(\sigma)) \\
 &= (\omega(P^T(\sigma)))^T \\
 &= (\mathcal{B}(\sigma))^T.
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma) &= \omega(Q^T(\omega_{0,\bar{n}} \circ \sigma)) \\
 &= \omega(Q(\sigma)) \\
 &= (\omega(Q^T(\sigma)))^T \\
 &= (\mathcal{L}(\sigma))^T.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\omega_{0,n} \circ \sigma) &= \omega(P^T(\omega_{0,n} \circ \sigma)) \\
 &= \omega(\text{ev}(P(\sigma))) \\
 &= (\omega(P(\sigma)))^{ev} \\
 &= \left( (\omega(P^T(\sigma)))^T \right)^{ev} \\
 &= \left( (\mathcal{B}(\sigma))^T \right)^{ev}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) &= \mathcal{L}((\omega_{0,n} \circ \sigma)^*) \\
 &= \left( (\mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma))^T \right)^{ev} \\
 &= \left( \left( (\mathcal{L}(\sigma))^T \right)^T \right)^{ev} \\
 &= (\mathcal{L}(\sigma))^{ev}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) &= \mathcal{B}((\omega_{0,n} \circ \sigma)^*) \\
 &= (\mathcal{B}(\omega_{0,n} \circ \sigma))^{I'} \\
 &= \left( \left( (\mathcal{B}(\sigma))^T \right)^{ev} \right)^T \\
 &= \left( \left( (\mathcal{B}(\sigma))^T \right)^T \right)^{ev} \\
 &= (\mathcal{B}(\sigma))^{ev}.
 \end{aligned}$$

□

Nous allons généraliser cette proposition des permutations aux mots arbitraires. Le résultat plus général est donné dans la proposition 27 de la section 4.5 dans ce chapitre.

### 4.3 Algorithme de redressement d'un mot qui n'est pas un mot de Yamanouchi

Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Par le lemme 4 du chapitre 2, il existe  $v \in \mathcal{Y}$  tel que  $u = vw \in \mathcal{Y}$ . Supposons que  $u \in \mathcal{Y}_{n,\lambda}$  et que  $v \in \mathcal{Y}_{m,\mu}$  pour certains entiers  $m$  et  $n$  tels que  $\lambda \vdash n$  et  $\mu \vdash m$  avec  $m \leq n$ . Par la proposition 3 du chapitre 2, on peut identifier  $w$  à un tableau gauche standard  $g$  de forme  $\lambda/\mu$  tel que  $\omega_g(g) = w$ . Plus précisément,  $g = st(t|[m+1, n])$  où  $t = \omega^{-1}(u)$ . Par exemple, pour  $w = 32142$ , on prend  $v = 112$  de sorte que  $u = vw = 11232142$  est un mot de Yamanouchi de forme  $(3, 3, 1, 1)$ . Comme  $v = 112$  est un mot de Yamanouchi de forme  $(2, 1)$ , alors  $w = 32142$  est un suffixe de  $u$

de forme  $(4, 3, 1, 1) / (2, 1)$  qu'on peut identifier au tableau gauche standard

$$g = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline & 2 & 5 \\ \hline & & 3 \\ \hline \end{array}.$$

L'arrangement associé à  $w$  qu'on note par  $\mathbf{a}_w$  est

$$\mathbf{a}_w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline & 2 & 5 \\ \hline & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

En appliquant la méthode de van Leeuwen à l'arrangement  $\mathbf{a}_w$ , on obtient le tableau de Young standard  $t_w$  tel que :

$$t_w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Ce qui implique que  $\mathcal{L}(w) = \omega(t_w) = 11122$ .

Remarquons que le redressé de  $g$  est  $t_w$ , c'est-à-dire  $J(g) = t_w$ . Ceci nous amène à poser la question suivante : est-ce-qu'on peut toujours obtenir  $t_w$  à partir du tableau gauche standard  $g$ , qui vérifie  $\omega_g(g) = w$ , en le redressant par une suite de glissements du jeu de taquin de Schützenberger. La réponse à cette question est oui et la preuve est donnée en détails à la section 4.4 suivante. Ainsi on peut dire que le lien entre l'algorithme de Robinson, l'algorithme d'insertion colonne de Schensted et l'algorithme du jeu de taquin de Schützenberger est très étroit.

Ce résultat principal est une conjecture posée par notre directeur de recherche Christophe Reutenauer. Voici son énoncé :

**Conjecture 1** Soit  $w \in \mathbb{P}^*$  et soit  $g$  un tableau gauche standard tel que  $\omega_g(g) = w$ .

Alors

$$\omega(J(g)) = \mathcal{L}(w).$$

Afin de donner une preuve pour cette conjecture, nous allons élaborer dans cette section un algorithme permettant de transformer un mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi en un mot de Yamanouchi qu'on note par  $\mathcal{F}(w)$ . On appellera cet algorithme l'algorithme de redressement car il est compatible avec l'algorithme de redressement d'un tableau gauche standard donné au chapitre 1. En effet, en identifiant le mot  $w$  à un tableau gauche standard  $g$ , le mot  $\mathcal{F}(w)$  est le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $J(g)$  qui est le redressé de  $g$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(w) = \omega(J(g)).$$

De plus,  $\mathcal{F}(w)$  ne dépend pas de la manière dont on a obtenu le tableau gauche  $g$ , c'est-à-dire si on identifie  $w$  à un autre tableau gauche standard  $g'$ , alors  $\mathcal{F}(w)$  est le même.

Nous allons montrer dans la section 4.4 suivante que le mot  $\mathcal{F}(w)$  est unique. Plus précisément, nous montrerons que

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w).$$

Ce qui donne une preuve de la conjecture précédente car

$$\omega(J(g)) = \mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w).$$

Supposons que

$$u = vw = x_1 \cdots x_n$$

et que  $v = \text{préf}_m(u)$  et  $w = \text{suff}_{n-m}(u)$ . Remarquons que le fait que  $w$  soit un suffixe de  $u$  implique que le tableau gauche standard  $g$  associé à  $w$  est le standardisé de la partie supérieure  $t|[m+1, n]$  du tableau de Young standard  $t$  associé à  $u$  dont la partie inférieure restante  $t|[m]$  est le tableau de Young standard associé à  $v$ . Lorsqu'on applique à  $t$  l'algorithme d'évacuation donné à la section 1.8, la partie supérieure  $t|[m+1, n]$  descend à chaque fois à cause des glissements effectués et après un certain nombre de glissements, la forme de  $t|[m+1, n]$  devient normale, c'est-à-dire que  $t|[m+1, n]$  est redressé. Ainsi, lorsqu'on applique à  $u$  l'algorithme d'évacuation donné à la section

3.3, ce qui est équivalent à évacuer  $t$ , l'algorithme de redressement du mot  $w$  consiste à appliquer cet algorithme d'évacuation à  $u = vw$  et dans la suite de mots de Yamanouchi  $u, u', \dots$  qui ont respectivement les longueurs  $n, n-1, \dots$ , le redressé de  $w$  est le mot de Yamanouchi dans cette suite qu'on note par  $\mathcal{F}(w)$  qui a la même longueur que  $w$ . Notons que  $\mathcal{F}(w)$  est le  $(m+1)$ -ème mot de Yamanouchi dans la suite précédente. Ainsi, les étapes de cet algorithme de redressement de  $w$  ne sont que les  $m$  premières étapes de l'algorithme d'évacuation de  $u = vw$  où  $m = |v|$ . Plus tard, on va montrer que le mot obtenu  $\mathcal{F}(w)$  est unique et ne dépend pas de  $v$  et donc ne dépend pas de  $g$ .

Par exemple, pour  $w = 3423$  et  $v = 11211$ , on a :  $u = 112113423 \in \mathcal{Y}$  et

$$\mathcal{F}(w) = 1212.$$

En effet, on applique l'algorithme d'évacuation à  $u$  et on se restreint aux cinq premières étapes :

$$\begin{array}{cccccccc}
 (1)_1 & (1)_2 & 2_1 & (1)_3 & (1)_4 & 3_1 & 4_1 & 2_2 & 3_2 \\
 & & & & & & & & \\
 \cdot & (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & 1_3 & (3)_1 & (4)_1 & 2_2 & 3_2 \\
 & & & & & & & & \\
 \cdot & \cdot & (1)_1 & (1)_2 & (1)_3 & 2_1 & 3_1 & 2_2 & 3_2 \\
 & & & & & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & (1)_1 & (1)_2 & 2_1 & 3_1 & (2)_2 & (3)_2 \\
 & & & & & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (1)_1 & (2)_1 & (3)_1 & 1_2 & 2_2 \\
 & & & & & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & (2)_2
 \end{array}$$

Maintenant, on peut donner la définition suivante :

**Définition 56** *Le redressé  $\mathcal{F}(w)$  d'un mot  $w$  est le mot de Yamanouchi qui a la même longueur que  $w$  et qu'on peut obtenir à partir de  $w$  par une certaine suite de glissements.*



Un algorithme pour calculer  $\mathcal{F}(w)$  consiste à effectuer les  $m$  premières étapes de l'algorithme d'évacuation, donné à la section 3.3, de  $vw$  où  $vw \in \mathcal{Y}$  et  $v \in \mathcal{Y}_m$ . On appellera cet algorithme l'algorithme de redressement. Nous montrerons ci-dessous que le mot de Yamanouchi  $\mathcal{F}(w)$  est unique en montrant qu'il est identique à  $\mathcal{L}(w)$  (Théorème 8).

Comme les étapes de l'algorithme de redressement du mot  $w$  sont les  $m$  premières étapes des  $n$  étapes de l'algorithme d'évacuation du mot de Yamanouchi  $u$  tel que  $u = vw$  avec  $|v| = m$  et  $|u| = n$  et comme l'opération d'évacuation d'un mot de Yamanouchi est une involution, alors on peut déduire que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(w))^{ev} &= z_1 z_2 \cdots z_{n-m} \\ &= \text{préf}_{n-m}((vw)^{ev}). \end{aligned}$$

Ce qui implique le lemme suivant :

**Lemme 8** Soient  $w \in \mathbb{P}^*$  et  $v \in \mathcal{Y}$  tels que  $vw \in \mathcal{Y}$ . Alors

$$\mathcal{F}(w) = (\text{préf}_{|w|}((vw)^{ev}))^{ev}.$$

On peut remarquer dans l'exemple sur l'algorithme d'évacuation, donné à la section 3.3, que si on supprime la première ligne, les lignes restantes donnent l'évacué du mot de Yamanouchi  $u'$ , c'est-à-dire que  $(u')^{ev} = z_1 \cdots z_{n-1}$ . Remarquons aussi que  $u' = \mathcal{F}(\text{su}ff_{n-1}(u))$ . Ce qui implique que

$$(\mathcal{F}(\text{su}ff_{n-1}(u)))^{ev} = \text{préf}_{n-1}(u^{ev}).$$

La proposition suivante donne un résultat plus général.

**Proposition 23** (Schützenberger) Soit  $u$  un mot de Yamanouchi de longueur  $n$ . Alors pour tout  $k \in [n]$  :

$$(\mathcal{F}(\text{su}ff_k(u)))^{ev} = \text{préf}_k(u^{ev}).$$

La preuve de cette proposition découle directement par construction de l'algorithme d'évacuation et de l'algorithme de redressement et du fait que l'opération d'évacuation est une involution.

Notons que ce résultat a été déjà démontré par Schützenberger ((Schützenberger, 1976), section 3.6) pour les tableaux de Young standards où il a montré que si  $t$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments, alors

$$ev(J(st(t| [n - k + 1, n]))) = (ev(t)) | [k],$$

où  $J(st(t| [n - k + 1, n]))$  dénote le redressé du tableau gauche standard  $st(t| [n - k + 1, n])$ .

Le lemme suivant peut être déduit directement de l'algorithme de redressement. En effet, remarquons que dans l'exemple ci-haut où  $w = 3423$  et  $\mathcal{F}(w) = 1212$ , on peut supprimer la dernière colonne et en posant  $w' = 342$ , on peut remarquer clairement puisque  $vw'$  est un mot de Yamanouchi car il est le préfixe du mot de Yamanouchi  $vw$ , que la partie restante donne exactement le redressement de  $w'$  comme illustré ci-dessous. Ce qui implique que  $\mathcal{F}(w') = 121$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 (1)_1 & (1)_2 & 2_1 & (1)_3 & (1)_4 & 3_1 & 4_1 & 2_2 & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & 1_3 & (3)_1 & (4)_1 & 2_2 & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & (1)_1 & (1)_2 & (1)_3 & 2_1 & 3_1 & 2_2 & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & (1)_1 & (1)_2 & 2_1 & 3_1 & (2)_2 & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & (1)_1 & (2)_1 & (3)_1 & 1_2 & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & & & 
 \end{array}$$

Donc

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(3423) = \mathcal{F}(w'3) = 1212 = \mathcal{F}(342)2 = \mathcal{F}(w')2.$$

On peut aussi supprimer les deux dernières colonnes et en posant  $w'' = 34$ , on obtient

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(3423) = \mathcal{F}(w''23) = 1212 = \mathcal{F}(34)12 = \mathcal{F}(w'')12.$$

Dans toute la suite de cette thèse, on va utiliser la notation suivante :

Si  $u = a_1 \cdots a_n$  et  $v = b_1 \cdots b_n$  sont deux mots dans  $\mathbb{P}^n$ , alors on écrit  $u \leq v$  si et seulement si pour tout  $i \in [n] : a_i \leq b_i$ .

Maintenant, on peut donner le lemme suivant :

**Lemme 9** *Pour tous mots  $u, v \in \mathbb{P}^*$ , on a :*

$$\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}(u)w \text{ où } w \leq v \text{ et } \mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(w).$$

### Preuve

On peut remarquer que lorsqu'on applique l'algorithme de redressement à un mot, dans la même colonne et d'une ligne à une ligne suivante du haut vers le bas une lettre  $a$  soit elle reste  $a$  ou soit elle devient  $a - 1$ . Ce qui implique que si on prend un mot  $w$  dont les lettres sont situées dans une certaine ligne entre deux certaines colonnes, chaque mot  $w'$  situé dans une ligne en bas entre les mêmes colonnes vérifie  $w' \leq w$ .

Supposons que  $|v| = m$ . En appliquant l'algorithme de redressement à  $uv$ , on obtient  $\mathcal{F}(uv)$ . Maintenant, en supprime les  $m$  dernières colonnes et on obtient  $\mathcal{F}(u)$ . Ce qui implique que  $\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}(u)w$  avec  $w \leq v$ . On peut redresser  $w$  comme étant un suffixe du mot de Yamanouchi  $\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}(u)w$ , ce qui donne aussi le redressé de  $v$ . Par conséquent, on obtient

$$\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(w).$$

Pour mieux cerner cette situation on peut observer le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \dots & u & v \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 \mathcal{F}(u) & w & \text{on a : } \mathcal{F}(u)w = \mathcal{F}(uv). \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
 \mathcal{F}(v) & \text{on a : } \mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(w)
 \end{array}$$

□

On a vu à la dernière section du chapitre 2 que la concaténation de deux mots de Yamanouchi est un mot de Yamanouchi. On a aussi donné cette opération en utilisant les tableaux de Young standards qui sont en bijection avec les mots de Yamanouchi et on a noté le tableau obtenu des deux tableaux  $T$  et  $S$  par  $T * S$ . Cette opération, sous sa forme tableau, intervient dans ((Poirier et Reutenauer, 1995), page 87). Poirier et Reutenauer ont mentionné qu'on peut simuler cette opération par jeu de taquin de Schützenberger comme suit : soit  $P_1$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments et soit  $P_2$  un tableau de Young standard à  $m$  éléments. Soit  $P'_2$  le tableau standard obtenu du tableau  $P_2$  en ajoutant  $n$  à chacun de ses éléments. Si on place  $P_1$  en haut et à gauche de  $P'_2$ , on obtient un tableau gauche de Young standard, qu'on note par  $P$  à  $n + m$  éléments et le tableau  $P_1 * P_2$  correspond au redressé de  $P$ , c'est-à-dire  $P_1 * P_2 = J(P)$ .

Nous allons montrer cette propriété. En effet, posons  $u_1 = \omega(P_1)$ ,  $u_2 = \omega(P_2)$  et  $u = \omega_g(P)$ . Soit  $u'_1$  le mot obtenu de  $u_1$  en ajoutant  $k$  à chacun de ses lettres où  $k$  est la plus grande lettre de  $u_2$ . Ainsi

$$u = u'_1 u_2.$$

Par exemple, pour  $P_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$  et  $P_2 = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ , on a  $P'_2 = \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array}$ ,  $P = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & & 7 \\ \hline & & 5 \\ \hline & & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$

et  $P_1 * P_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$ . Ainsi  $u_1 = 112$ ,  $u_2 = 1213$ ,  $k = 3$ ,  $u'_1 = 445$  et  $u = 4451213$ .

Pour montrer que  $P_1 * P_2 = J(P)$ , il suffit de montrer que

$$\mathcal{F}(u'_1 u_2) = u_1 u_2$$

car  $\omega(J(P)) = \mathcal{F}(\omega_g(P)) = \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u'_1 u_2)$  et  $\omega(P_1 * P_2) = \omega(P_1) \omega(P_2) = u_1 u_2$ .

En effet, en utilisant le lemme 9 précédent, on obtient

$$\mathcal{F}(u'_1 u_2) = \mathcal{F}(u'_1) v \text{ tel que } v \leq u_2 \text{ et } \mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(u_2).$$

Mais  $\mathcal{F}(u'_1) = u_1$  et  $\mathcal{F}(u_2) = u_2$  et donc  $v \leq u_2$  et  $\mathcal{F}(v) = u_2$ , ce qui implique que  $v = u_2$  car  $u_2 = \mathcal{F}(v) \leq v$ .

#### 4.4 Résultat principal : L'algorithme de redressement et l'algorithme de Robinson sont équivalents

Le théorème suivant donne le résultat principal suivant : l'algorithme de redressement et l'algorithme de Robinson sont équivalents.

**Théorème 11** *Pour tout mot  $w \in \mathbb{P}^n$ , on a :*

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{F}(w).$$

Pour montrer ce théorème, on va supposer que  $w$  n'est pas un mot de Yamanouchi car dans le cas contraire  $\mathcal{L}(w) = w = \mathcal{F}(w)$ .

Rappelons les étapes à suivre pour obtenir  $\mathcal{F}(w)$  à partir de  $w$  :

On commence par prolonger  $w$  à gauche pour obtenir un mot de Yamanouchi  $u = vw$  ayant une longueur strictement plus grande que celle de  $w$ . Ensuite, on écrit  $u$  sous la forme  $(u)_{uT}$  et on applique l'algorithme de redressement à  $w$  qui consiste à effectuer les  $|v|$  premières étapes de l'algorithme d'évacuation de  $u$ . Dans chaque étape, une suite de lettres est remplacée par une autre suite de lettres de sorte que chaque lettre  $a_b$  remplace soit la lettre  $a_{b+1}$  ou bien la lettre  $(a+1)_b$ .

Dans toute la suite de cette section,  $v = v_1 \cdots v_m$  et  $w = w_1 \cdots w_n$ . En appliquant l'algorithme de redressement au mot  $w$ , on peut montrer que lorsqu'une lettre  $x_i$  dans  $w$  (on considère chaque lettre de  $w$  comme une lettre étiquetée de  $(u)_{uT}$ ) est remplacée par la lettre  $(x-1)_i$  de  $w$  pendant une certaine étape de l'application de l'algorithme de redressement à  $w$ , alors l'indice  $i_w(x_i)$  est le plus grand parmi tous les indices  $i_w(x)$  de toutes les lettres  $x$  de  $w$ . Ce résultat est donné plus précisément par le lemme suivant :

**Lemme 10** *Si la lettre  $(x-1)_i$  de  $w$  remplace la lettre  $x_i$  de  $w$ , alors toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $x_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $x_i$ , les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $x_i$  et à droite de  $(x-1)_i$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $x_i$ , tandis que toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de la lettre  $(x-1)_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de la lettre  $x_i$ .*

### Preuve

On va montrer que si  $x$  est une lettre de  $w$ , alors

$$\begin{cases} i_w(x) \leq i_w(x_i) & \text{si } x \text{ est située à droite de } x_i, \\ i_w(x) < i_w(x_i) & \text{si } x \text{ est située à gauche de } x_i \text{ et à droite de } (x-1)_i, \\ i_w(x) \leq i_w(x_i) & \text{si } x \text{ est située à gauche de } (x-1)_i. \end{cases}$$

Il est équivalent par le lemme 2 du chapitre 2 de montrer que

$$\begin{cases} i_{vw}(x) \leq i_{vw}(x_i) & \text{si } x \text{ est située à droite de } x_i, \\ i_{vw}(x) < i_{vw}(x_i) & \text{si } x \text{ est située à gauche de } x_i \text{ et à droite de } (x-1)_i, \\ i_{vw}(x) \leq i_{vw}(x_i) & \text{si } x \text{ est située à gauche de } (x-1)_i. \end{cases}$$

On va montrer chaque cas séparément.

- $x$  est une lettre de  $w$  située à droite de la lettre  $x_i$  :

Soit  $x = x_k$ . Ainsi

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots (x-1)_i \cdots x_i \cdots x_k \cdots w_n$$

où  $v = v_1 \cdots v_m$  et  $w = w_1 \cdots w_n$ . Dans ce cas,  $k - i$  est le nombre des lettres  $x$  situées entre  $x_i$  (exclue) et  $x_k$  (inclue). Supposons que  $s$  est le nombre des lettres  $x-1$  situées entre  $x_i$  et  $x_k$ . On peut déduire que  $k - i \leq s$ . En effet, comme  $vw$  est un mot de Yamanouchi et comme le préfixe d'un mot de Yamanouchi est un mot de Yamanouchi, alors le mot  $v_1 \cdots x_k$  est un mot de Yamanouchi et donc

$$|v_1 \cdots x_k|_{x-1} \geq |v_1 \cdots x_k|_x,$$

ce qui implique que  $i + s \geq k$  (remarquons qu'il n'y a pas de lettres  $x-1$  entre  $(x-1)_i$  et  $x_i$ , car dans le cas contraire, il y aura la lettre  $(x-1)_{i+1}$  entre  $(x-1)_i$  et  $x_i$  et donc, d'après l'algorithme de redressement,  $(x-1)_i$  remplace la lettre  $(x-1)_{i+1}$  et pas la lettre  $x_i$ , ce qui donne une contradiction avec le fait que la lettre  $(x-1)_i$  a remplacé la lettre  $x_i$ ). Comme  $i_{vw}(x_k) = k - (i + s)$  et  $i_{vw}(x_i) = 0$ , alors dans ce cas, pour déduire que

$$i_{vw}(x_k) \leq i_{vw}(x_i),$$

il suffit de remarquer que  $k - (i + s) \leq 0$ .

- $x$  est une lettre de  $w$  située à gauche de la lettre  $x_i$  et à droite de la lettre  $(x-1)_i$  :

Soit  $x = x_j$ . Ainsi

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots (x-1)_i \cdots x_j \cdots x_i \cdots x_k \cdots w_n.$$

Dans ce cas,  $j < i$  car  $x_j$  est située à gauche de  $x_i$ . Comme il n'y a pas de lettres  $x-1$  entre  $(x-1)_i$  et  $x_i$  et donc il n'y a pas de lettres  $x-1$  entre  $(x-1)_i$  et  $x_j$ , alors le nombre des lettres  $x-1$  situées à gauche de  $x_j$  est  $i$  qui est aussi le nombre des lettres

$x - 1$  situées à gauche de  $x_i$ . Ainsi  $i_{vw}(x_j) = j - i$  et  $i_{vw}(x_i) = 0$ . Comme  $j < i$ , alors  $j - i < 0$ , c'est-à-dire que

$$i_{vw}(x_j) < i_{vw}(x_i).$$

- $x$  est une lettre de  $w$  située à gauche de la lettre  $(x - 1)_i$  :

Soit  $x = x_\ell$ . Ainsi

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots x_\ell \cdots (x - 1)_i \cdots x_j \cdots x_i \cdots x_k \cdots w_n.$$

Soit  $t$  est le nombre des lettres  $x - 1$  situées entre  $x_\ell$  et  $(x - 1)_i$  (inclue). Dans ce cas,  $\ell \leq i - t$ . En effet, comme le mot  $v_1 \cdots x_\ell$  est un mot de Yamanouchi, alors

$$|v_1 \cdots x_\ell|_{x-1} \geq |v_1 \cdots x_\ell|_x,$$

ce qui implique que  $i - t \geq \ell$ . Ainsi  $i_{vw}(x_\ell) = \ell - (i - t)$ . Comme  $i_{vw}(x_i) = 0$  et  $\ell - (i - t) \leq 0$ , alors

$$i_{vw}(x_\ell) \leq i_{vw}(x_i).$$

□

On peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 4** *Si la lettre  $(x - 1)_i$  est une lettre de  $v$  et elle remplace la lettre  $x_i$  de  $w$  pendant une certaine étape de l'application de l'algorithme de redressement à  $w$ , alors toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $x_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $x_i$  tandis que toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $x_i$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $x_i$ .*

Dans ce cas,

$$vw = v_1 \cdots (x - 1)_i \cdots v_m w_1 \cdots x_j \cdots x_i \cdots x_k \cdots w_n.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 10 précédent sans tenir compte du dernier cas. En effet, comme  $(x - 1)_i$  est une lettre de  $v$ , alors il n'y a pas de lettre  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $(x - 1)_i$ .



**Remarque 4** Rappelons que pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  par l'algorithme de Robinson, on lui applique un certain nombre de réductions de type  $R(k)$ . Chaque réduction de type  $R(k)$  transforme une lettre  $k$  de  $w$  à la lettre  $k-1$ . Cette lettre  $k$  a le plus grand indice parmi les indices de toutes les lettres  $k$  de  $w$  et elle est située la première à gauche dans  $w$  par rapport aux lettres  $k$  de  $w$  ayant un indice égal à son indice. Dans les conditions du corollaire précédent, la lettre  $x_i$  a le plus grand indice parmi les indices de toutes les lettres  $x$  de  $w$  et elle est située la première à gauche dans  $w$  par rapport aux lettres  $x$  de  $w$  ayant un indice égal à son indice. Ainsi remplacer  $x$  par  $x-1$  est exactement appliquer la réduction de type  $R(x)$  à  $w$ .

Maintenant, on donne un résultat plus général que celui du corollaire précédent.

**Corollaire 5** Si la lettre  $(x-1)_{i-k}$  avec  $k \geq 1$  est une lettre de  $v$  et si elle remplace la lettre  $(x-1)_{i-k+1}$  de  $w$ , la lettre  $(x-1)_{i-k+1}$  de  $w$  remplace la lettre  $(x-1)_{i-k+2}$  de  $w$  et ainsi de suite jusqu'à ce que la lettre  $(x-1)_i$  de  $w$  remplace la lettre  $x_i$  de  $w$ , alors toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $x_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $x_i$  tandis que toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $x_i$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $x_i$ .

### Preuve

Par le lemme 10 précédent, toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $x_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $x_i$  et toutes les lettres  $x$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $x_i$  et à droite de  $(x-1)_i$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $x_i$ .

Soit  $x$  une lettre de  $w$  située entre  $(x-1)_{i-k+j}$  et  $(x-1)_{i-k+j+1}$  pour un certain  $j$  tel que  $1 \leq j \leq k-1$ . On va montrer que  $i_w(x) < i_w(x_i)$ . Il est équivalent de montrer que  $i_{vw}(x) < i_{vw}(x_i)$  sachant que  $i_{vw}(x_i) = 0$ . Soit  $x = x_q$ . Ainsi,

$$vw = v_1 \cdots (x-1)_{i-k} \cdots v_m w_1 \cdots (x-1)_{i-k+1} \cdots (x-1)_{i-k+j} \cdots x_q \cdots (x-1)_{i-k+j+1} \cdots (x-1)_i \cdots x_i \cdots w_n.$$

On a  $i_{vw}(x_q) = q - (i - k + j)$ . Comme le mot  $v_1 \cdots x_q$  est un mot de Yamanouchi, alors

$$|v_1 \cdots x_q|_{x-1} \geq |v_1 \cdots x_q|_x,$$

ce qui implique que  $i - k + j \geq q$ . Remarquons que  $q \neq i - k + j$ , car dans le cas contraire  $x_q = x_{i-k+j}$  et il y aura la lettre  $x_{i-k+j}$  entre  $(x-1)_{i-k+j}$  et  $(x-1)_{i-k+j+1}$  et donc, d'après l'algorithme de redressement,  $(x-1)_{i-k+j}$  remplace la lettre  $x_{i-k+j}$  et pas la lettre  $(x-1)_{i-k+j+1}$ , ce qui donne une contradiction avec le fait que la lettre  $(x-1)_{i-k+j}$  a remplacé la lettre  $(x-1)_{i-k+j+1}$ . Donc  $q < i - k + j$ , ce qui implique que

$$i_{vw}(x_q) < i_{vw}(x_i).$$

Soit  $x = x_p$  une lettre de  $w$  située à gauche de  $(x-1)_{i-k+1}$ . Ainsi

$$vw = v_1 \cdots (x-1)_{i-k} \cdots v_m w_1 \cdots x_p \cdots (x-1)_{i-k+1} \cdots (x-1)_i \cdots x_i \cdots w_n.$$

On a :  $i_{vw}(x_p) = p - (i - k)$  car il n'y a pas de lettres  $x-1$  entre  $(x-1)_{i-k}$  et  $x_p$ .

Comme le mot  $v_1 \cdots x_p$  est un mot de Yamanouchi, alors

$$|v_1 \cdots x_p|_{x-1} \geq |v_1 \cdots x_p|_x,$$

ce qui implique que  $i - k \geq p$ . Remarquons que  $p \neq i - k$ , car dans le cas contraire  $x_p = x_{i-k}$  et il y aura la lettre  $x_{i-k}$  entre  $(x-1)_{i-k}$  et  $(x-1)_{i-k+1}$  et donc, d'après l'algorithme de redressement,  $(x-1)_{i-k}$  remplace la lettre  $x_{i-k}$  et pas la lettre  $(x-1)_{i-k+1}$ , ce qui donne une contradiction avec le fait que la lettre  $(x-1)_{i-k}$  a remplacé la lettre  $(x-1)_{i-k+1}$ . Donc  $p < i - k$ , ce qui implique que

$$i_{vw}(x_p) < i_{vw}(x_i).$$

□

Le lemme suivant donne un résultat plus général que les résultats précédents

**Lemme 11** *Si la lettre  $(x-1)_i$  de  $v$  remplace la lettre  $x_i$  de  $w$  et la lettre  $x_i$  remplace la lettre  $(x+1)_i$  de  $w$ , alors après que la lettre  $(x-1)_i$  a remplacé la lettre  $x_i$  et avant*

que la lettre  $x_i$  ne remplace  $(x+1)_i$ , toutes les lettres  $(x+1)$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $(x+1)_i$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $(x+1)_i$  tandis que toutes les lettres  $(x+1)$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $(x+1)_i$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $(x+1)_i$ .

### Preuve

Dans ce cas,

$$vw = v_1 \cdots (x-1)_i \cdots v_m w_1 \cdots x_i \cdots (x+1)_i \cdots w_n.$$

Après que la lettre  $(x-1)_i$  a remplacé la lettre  $x_i$  et avant que la lettre  $x_i$  ne remplace  $(x+1)_i$ , on a :

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots (x-1)_i \cdots (x+1)_i \cdots w_n.$$

Par le lemme 10 précédent, chaque lettre  $(x+1)$  de  $u$  située à droite de  $(x+1)_i$  a un indice plus petit ou égal à l'indice de  $(x+1)_i$ . Supposons que  $x+1 = (x+1)_j$  est une lettre de  $w$  située entre  $(x-1)_i$  et  $(x+1)_i$ . Dans ce cas,

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots (x-1)_i \cdots (x+1)_j \cdots (x+1)_i \cdots w_n.$$

Comme il n'y a pas de lettre  $x$  entre  $(x-1)_i$  et  $(x+1)_i$  et donc il n'y a pas de lettre  $x$  entre  $(x-1)_i$  et  $(x+1)_j$  et comme le nombre des lettres  $x$  dans le mot  $v_1 \cdots (x-1)_i$  est  $i-1$ , alors

$$i_{vw}((x+1)_j) = j - (i-1) = j - i + 1.$$

Pour déduire que

$$i_{vw}((x+1)_j) < i_{vw}((x+1)_i),$$

il suffit de remarquer que  $i_{vw}((x+1)_i) = i - (i-1) = 1$  et que  $j < i$  car  $(x+1)_j$  est située à gauche de  $(x+1)_i$ .

Soit  $x+1 = (x+1)_k$  une lettre de  $u$  située entre  $w_1$  et  $(x-1)_i$ . Dans ce cas,

$$vw = v_1 \cdots v_m w_1 \cdots (x+1)_k \cdots (x-1)_i \cdots (x+1)_j \cdots (x+1)_i \cdots w_n.$$

On a :

$$i_{vw}((x+1)_k) = k - h,$$

où  $h = |v_1 \cdots (x+1)_k|_x$ . Remarquons que  $h < i$  car

$$h = |v_1 \cdots (x+1)_k|_x \leq |v_1 \cdots (x-1)_i|_x = i - 1.$$

Comme  $i_{vw}((x+1)_i) = 1$ , il suffit de montrer que  $k - h < 1$ . Comme  $v_1 \cdots (x+1)_k$  est un mot de Yamanouchi, alors

$$|v_1 \cdots (x+1)_k|_x \geq |v_1 \cdots (x+1)_k|_{x+1},$$

ce qui implique que  $h \geq k$ , c'est-à-dire que  $k - h \leq 0 < 1$ .

□

**Remarque 5** Dans les conditions du lemme précédent, après que la lettre  $(x-1)_i$  a remplacé  $x_i$  et avant que la lettre  $x_i$  ne remplace la lettre  $(x+1)_i$ , les indices  $i_w((x-1)_j)$  et  $i_w((x+1)_i)$  augmentent de 1 à cause de la disparition de la lettre  $x_i$  qui a été remplacée par  $(x-1)_i$  et l'indice  $i_w((x+1)_k)$  ne change pas car  $(x+1)_k$  était située à gauche de la lettre  $x_i$ . Ceci montre que  $i_w((x+1)_j) < i_w((x+1)_i)$  avant que et après que  $(x-1)_i$  ne remplace  $x_i$ , alors que  $i_w((x+1)_k) \leq i_w((x+1)_i)$  avant que  $(x-1)_i$  ne remplace  $x_i$  et  $i_w((x+1)_k) < i_w((x+1)_i)$  après que  $(x-1)_i$  a remplacé  $x_i$ .

**Remarque 6** Dans les conditions du lemme 11 précédent, la lettre  $x_i$  a le plus grand indice parmi les indices de toutes les lettres  $x$  de  $w$  et elle est située la première à gauche dans  $w$  par rapport aux lettres  $x$  de  $w$  ayant un indice égal à son indice. Ainsi, remplacer  $x$  par  $(x-1)$  est exactement appliquer  $R(x)$  à  $w$ . Une fois  $x-1$  a remplacé  $x$  et avant que  $x$  ne remplace  $(x+1)$ , la lettre  $(x+1)_i$  a le plus grand indice parmi les indices de toutes les lettres  $(x+1)$  de  $w$  et elle est située la première à gauche dans  $w$  par rapport aux lettres  $(x+1)$  de  $w$  ayant un indice égal à son indice. Ainsi remplacer  $(x+1)$  par  $x$  est exactement appliquer  $R(x+1)$  à  $w$ . Par conséquent, remplacer successivement  $x$  par  $(x-1)$  et  $(x+1)$  par  $x$  est exactement appliquer successivement  $R(x)$  et  $R(x+1)$  à  $w$ .

Le lemme suivant donne un résultat plus général et on va l'utiliser directement pour donner la preuve du résultat principal de cette section.

**Lemme 12** *Supposons que dans certaine étape pendant l'application de l'algorithme de redressement au mot  $w$ , on a remplacé une suite dans  $w$  de la forme*

$$x_k, \dots, x_{k+k_1}, (x+1)_{k+k_1}, \dots, (x+1)_{k+k_1+k_2}, \dots, (x+m)_{k+k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, (x+m)_{k+k_1+\dots+k_m}$$

*où  $k = k_0 \geq 1$  et  $k_1, k_2, \dots, k_m, m$  sont des entiers positifs ou nuls, par l'une des deux suites suivantes :*

$$x_{k-1}, x_k, \dots, x_{k+k_1}, (x+1)_{k+k_1}, \dots, (x+1)_{k+k_1+k_2}, \dots, (x+m)_{\sum_{i=0}^{m-1} k_i}, \dots, (x+m)_{\left(\sum_{i=0}^m k_i\right)-1}$$

*ou*

$$(x-1)_k, x_k, \dots, x_{k+k_1}, (x+1)_{k+k_1}, \dots, (x+1)_{k+k_1+k_2}, \dots, (x+m)_{\sum_{i=0}^{m-1} k_i}, \dots, (x+m)_{\left(\sum_{i=0}^m k_i\right)-1}.$$

*Alors, ceci est équivalent à appliquer à  $w$  successivement des réductions de type  $R(k)$  selon l'une des deux suites suivantes :*

$$R(x+1), R(x+2), \dots, R(x+m)$$

*ou*

$$R(x), R(x+1), R(x+2), \dots, R(x+m)$$

*respectivement.*

### Preuve

On procède par récurrence sur  $m$ .

Si  $m = 0$ , alors soit que  $w$  reste le même ou soit que la lettre  $(x-1)_k$  de  $v$  remplace la lettre  $x_k$  de  $w$  et ceci par le corollaire 4 précédent et par la remarque 4 précédente est équivalent à appliquer la réduction de type  $R(x)$  à  $w$ .

Supposons que la propriété donnée ci-haut est vraie pour  $m$  avec  $m \geq 0$  et montrons qu'elle est aussi vraie pour  $m+1$ .

Par l'hypothèse de récurrence, tous les remplacement effectués avant que  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ne remplace  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  sont équivalents à appliquer à  $w$  successivement des réductions de type  $R(k)$  selon l'une des deux suites suivantes :

$$R(x + 1), R(x + 2), \dots, R(x + m)$$

ou

$$R(x), R(x + 1), R(x + 2), \dots, R(x + m).$$

Montrons maintenant que lorsque  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  remplace  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  alors ceci est équivalent à appliquer la réduction  $R(x + m + 1)$  à  $w$ . En effet, par le lemme 10 précédent, avant que  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ne remplace  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$ , toutes les lettres  $x + m + 1$  dans  $w$  qui sont à droite de la lettre  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$ , toutes les lettres  $x + m + 1$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  et à droite de  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ont un indice strictement plus petit que l'indice de  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  et toutes les lettres  $x + m + 1$  dans  $w$  qui sont à gauche de  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ont un indice plus petit ou égal à l'indice de  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$ .

Soit  $x + m + 1 = (x + m + 1)_j$  une lettre de  $w$  située à gauche de  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$ . Par la remarque 5 précédente, avant que  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ne remplace  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$ , on a

$$i_w((x + m + 1)_j) \leq i_w((x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}).$$

Mais après que  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m-1}$  a remplacé  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  et avant que  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  ne remplace  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$ , l'indice  $i_w((x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m})$  augmente de 1 à cause de la disparition de la lettre  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$  qui a été remplacée par  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m-1}$  et l'indice  $i_w((x + m + 1)_j)$  ne change pas car  $(x + m + 1)_j$  était située à gauche de  $(x + m)_{k+k_1+\dots+k_m}$ . Ceci montre que

$$i_w((x + m + 1)_j) < i_w((x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}).$$

Comme la lettre  $(x + m + 1)_{k+k_1+\dots+k_m}$  a le plus grand indice parmi les indices de toutes les lettres  $x + m + 1$  de  $w$  et elle est située la première à gauche dans  $w$  par rapport

aux lettres  $x + m + 1$  de  $w$  ayant un indice égal à son indice, alors remplacer  $x + m + 1$  par  $x + m$  est exactement appliquer  $R(x + m + 1)$  à  $w$ . Ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

### Preuve du théorème 8

D'après tout ce qui précède et en particulier d'après le lemme 12 précédent, lorsqu'on applique l'algorithme de redressement à  $w$  pour obtenir  $\mathcal{F}(w)$ , dans chaque étape le remplacement d'une suite de lettres par une autre suite de lettres est équivalent à l'application de réductions de type  $R(k)$  selon une certaine suite de réductions de type  $R(k)$ . Par conséquent,  $\mathcal{F}(w)$  est un mot de Yamanouchi obtenu de  $w$  en lui appliquant des réductions de type  $R(k)$  selon une certaine suite. Le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  est lui aussi obtenu de  $w$  en lui appliquant des réductions de type  $R(k)$  selon une suite qui n'est pas nécessairement la même suite précédente. Sachant que  $\mathcal{L}(w)$  est unique d'après le résultat de Thomas et que le nombre de réductions nécessaires pour transformer  $w$  en un mot de Yamanouchi est toujours constant, alors les deux suites précédentes ont le même nombre de réductions de type  $R(k)$  et une fois on les applique au mot  $w$  on obtient le même mot de Yamanouchi. Par conséquent,  $\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w)$ .

□

On peut déduire que  $\mathcal{F}(w)$  ne dépend pas du mot de Yamanouchi  $v$  qu'on a utilisé pour que  $u = vw$  soit un mot de Yamanouchi. En effet, supposons que  $v'w$  est un autre mot de Yamanouchi, alors en répétant le raisonnement précédent en remplaçant  $v$  par  $v'$  et  $i_{vw}(x)$  par  $i_{v'w}(x)$  pour toute lettre  $x$ , on obtient le même résultat qui est le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$ . Ainsi, remplacer le mot de Yamanouchi  $v$  par un autre mot de Yamanouchi  $v'$  ne change absolument rien. Donc  $\mathcal{F}(w)$  ne dépend pas de  $v$ .

**Remarque 7** Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Soient  $v_1, v_2 \in \mathcal{Y}$  tels que  $v_1 \neq v_2$  et  $v_1w, v_2w \in \mathcal{Y}$ . Alors  $w$ , comme suffixe du mot de Yamanouchi  $v_1w$ , peut être identifié à un tableau gauche standard  $g_1$  et peut aussi comme suffixe du mot de Yamanouchi  $v_2w$  être identifié à un

autre tableau gauche standard  $g_2$ . En appliquant l'algorithme de redressement à  $w$  on obtient un mot de Yamanouchi  $\mathcal{F}(w)$  dont le tableau de Young standard est le redressé de  $g_1$  et aussi le redressé de  $g_2$ . Ainsi,  $g_1$  et  $g_2$  ont le même redressé ce qui implique que les deux tableaux  $g_1$  et  $g_2$  sont jeu de taquin équivalents et donc Knuth équivalents.

**Remarque 8** Soit  $w$  un mot qui n'est pas un mot de Yamanouchi. Identifions  $w$  à un tableau gauche standard  $g$ . Le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  qui est  $\mathcal{F}(w)$  est le mot de Yamanouché associé au tableau de Young standard  $J(g)$  qui est le redressé de  $g$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w) = \omega(J(g)).$$

Comme chaque réduction de type  $R(k)$  transforme une lettre  $k$  en la lettre  $k-1$ , alors appliquer une réduction de type  $R(k)$  à  $w$  est équivalent à déplacer un élément dans  $g$  de la ligne  $k$  vers la ligne  $k-1$  à cause d'un glissement du jeu de taquin de Schützenberger pendant le redressement de  $g$ .

La proposition suivante découle directement du lemme 9 précédent et du théorème 8 précédent.

**Proposition 24** Pour tous mots  $u, v \in \mathbb{P}^*$ , on a

$$\mathcal{L}(uv) = \mathcal{L}(u)w \text{ où } w \leq v \text{ et } \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(w).$$

En particulier,

a) pour tout mot  $u \in \mathbb{P}^*$  et pour tout  $a \in \mathbb{P}$ , on a :

$$\mathcal{L}(ua) = \mathcal{L}(u)c \text{ avec } c \leq a.$$

b) pour tout mot  $u \in \mathbb{P}^*$  et pour tous  $a, b \in \mathbb{P}$ , on a :

$$\mathcal{L}(uab) = \mathcal{L}(u)cd \text{ avec } c \leq a \text{ et } d \leq b \text{ et } \mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(cd).$$

Remarquons que le résultat a) dans cette proposition correspond au résultat de la proposition 19 précédente.



## 4.5 Généralisation du résultat de M. A. A. van Leeuwen des permutations aux mots arbitraires

À chaque mot  $w = w_1 \cdots w_n$ , on associe un opérateur formel qu'on note par  $C(w)$  comme suit :

$$C(w) = \prod_{i \in [n], w_i \neq i} C_{w_i, i}.$$

Par exemple,  $C(11247) = C_{1,2}C_{2,3}C_{7,5}$ .

Remarquons que si  $w_1, w_2 \in \mathbb{P}^n$ , alors

$$C(w_1) = C(w_2) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Remarquons que pour  $\sigma = 463512$  donnée dans la section 4.2 précédente, on a

$$\begin{aligned} C(\mathcal{B}(\sigma)) &= C(121122) \\ &= C_{1,3}C_{1,4}C_{2,5}C_{2,6} \\ &= \mathcal{B}_\sigma. \end{aligned}$$

En général, on peut donner le lemme suivant :

**Lemme 13** *Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  :*

$$\mathcal{B}_\sigma = C(\mathcal{B}(\sigma)).$$

### Preuve

Un facteur  $C_{i',i}$  dans  $\mathcal{B}_\sigma$  signifie que dans une certaine application complète de la procédure de Robinson durant la transformation de l'arrangement associé  $\mathfrak{a}_\sigma$  au tableau de Young standard  $t_\sigma$ , le premier déplacement a commencé à partir d'une ligne  $i$  et le dernier déplacement a terminé à une ligne  $i'$ . Ce qui implique que la  $i$ -ème lettre de  $\mathcal{B}(\sigma)$  est  $i'$  et donc le facteur  $C_{i',i}$  apparaît aussi dans  $C(\mathcal{B}(\sigma))$ .

Si  $C_{i',i}$  est un facteur dans  $C(\mathcal{B}(\sigma))$ , alors la  $i$ -ème lettre de  $\mathcal{B}(\sigma)$  est  $i'$  et ceci implique que durant la transformation de l'arrangement  $\mathfrak{a}^{(n)}$  au tableau de Young standard  $S_\sigma$ ,

l'entier  $i$  s'est déplacé de la ligne  $i$  vers la ligne  $i'$ . Ce qui implique que le facteur  $C_{i',i}$  apparaît aussi dans  $\mathcal{B}_\sigma$ .

Par conséquent,  $\mathcal{B}_\sigma = C(\mathcal{B}(\sigma))$ .

□

Rappelons que si  $w = a_1 \cdots a_n \in \mathbb{P}^n$ , alors la permutation standardisée à droite de  $w$ , qu'on note par  $st_d(w)$ , est définie comme suit :

$$st_d(w) = h_w(a_1) \cdots h_w(a_n)$$

où  $h_w$  est l'unique fonction de l'ensemble des lettres de  $w$ , considérées comme étant deux à deux différentes, vers l'ensemble  $[n]$  qui vérifie pour tous  $i, j \in [n]$  :  $h_w(a_i) < h_w(a_j)$  si  $a_i < a_j$  ou ( $a_i = a_j$  et  $i > j$ ). La fonction  $h_w$  est une bijection entre l'ensemble des  $n$  lettres de  $w$  et l'ensemble  $[n]$ . On note la bijection inverse par  $h_w^{-1}$ . Par exemple, pour  $w = 35131$ , on a :  $st_d(w) = 45231$ . Ce qui implique que  $h_w^{-1}$  est donnée par  $h_w^{-1}(1) = 1$ ,  $h_w^{-1}(2) = 1$ ,  $h_w^{-1}(3) = 3$ ,  $h_w^{-1}(4) = 3$  et  $h_w^{-1}(5) = 5$ .

On note par  $h_w(C(w))$  l'opérateur formel suivant :

$$\begin{aligned} h_w(C(w)) &= h_w \left( \prod_{i \in [n], w_i \neq i} C_{w_i, i} \right) \\ &= \prod_{i \in [n], w_i \neq i \text{ et } w_i \neq h_w^{-1}(i)} C_{w_i, h_w^{-1}(i)}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour  $w = 35131$ ,

$$\begin{aligned} h_w(C(w)) &= h_w(C_{3,1}C_{5,2}C_{1,3}C_{3,4}C_{1,5}) \\ &= C_{3,1}C_{5,1}C_{1,3}C_{1,5}. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut donner la proposition suivante qui généralise le résultat de van Leeuwen, donné à la proposition 20 précédente, des permutations aux mots arbitraires.

**Proposition 25** *Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Alors*

$$\mathcal{L}(w) = \omega(Q^T(st_d(w))) \text{ et } \mathcal{B}_w = h_w(C(\omega(P^T(st_d(w))))) .$$

Dans le cas particulier où  $w$  est une permutation, on obtient le résultat de van Leeuwen. En effet, dans ce cas, on a  $st_d(w) = w$ , ce qui implique que

$$\mathcal{L}(w) = \omega(Q^T(st_d(w))) = \omega(Q^T(w))$$

et

$$\mathcal{B}_w = h_w(C(\omega(P^T(st_d(w)))) = h_w(C(\omega(P^T(w)))) = C(\omega(P^T(w)))$$

car  $h_w$  est l'identité. Comme  $w$  est une permutation, alors par le lemme 13 précédent,  $\mathcal{B}_w = C(\mathcal{B}(w))$ . Ce qui implique que :  $C(\mathcal{B}(w)) = C(\omega(P^T(w)))$  et donc  $\mathcal{B}(w) = \omega(P^T(w))$ .

Soit  $w$  un mot non vide tel que l'ensemble des lettres différentes de  $w$  est  $\{i_1, \dots, i_k\}$  avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . On note par  $w^{-\emptyset}$  le mot obtenu de  $w$  en remplaçant  $i_j$  par  $j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Par exemple, si  $w = 539943332$ , alors  $w^{-\emptyset} = 425532221$ . Plus précisément, soit  $\chi_w$  l'unique bijection croissante de  $\{i_1, \dots, i_k\}$  vers  $[k]$ , c'est-à-dire  $\chi_w(i_j) = j$  pour tout  $j \in [k]$ . Si  $w = a_1 \cdots a_n$ , alors

$$w^{-\emptyset} = \chi_w(a_1) \chi_w(a_2) \cdots \chi_w(a_n).$$

Remarquons que  $\mathfrak{a}_w$  l'arrangement associé à  $w$  a  $k$  lignes non vides telles que ces lignes non vides sont les lignes suivantes : la  $i_1$ -ème ligne, la  $i_2$ -ème ligne, ..., la  $i_{k-1}$ -ème ligne et la  $i_k$ -ème ligne avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . On note par  $\mathfrak{a}_w^{-\emptyset}$  l'arrangement obtenu de  $\mathfrak{a}_w$  en supprimant toutes les lignes vides, c'est-à-dire  $\mathfrak{a}_w^{-\emptyset}$  a  $k$  lignes non vides de sorte que la  $j$ -ème ligne est non vide et elle est identique à la  $i_j$ -ème ligne de  $\mathfrak{a}_w$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . On peut remarquer facilement que

$$\mathfrak{a}_w^{-\emptyset} = \mathfrak{a}_{w^{-\emptyset}}.$$

On peut remarquer aussi que si un entier est situé dans la ligne  $i$  dans l'arrangement  $\mathfrak{a}_w$ , alors il est situé dans la ligne  $\chi_w(i)$  dans l'arrangement  $\mathfrak{a}_w^{-\emptyset}$  et si un entier est situé dans la ligne  $i$  dans l'arrangement  $\mathfrak{a}_w^{-\emptyset}$ , alors il est situé dans la ligne  $\chi_w^{-1}(i)$  dans l'arrangement  $\mathfrak{a}_w$ .

On peut remarquer aussi que

$$st_d(w^{-\varnothing}) = st_d(w).$$

Soit  $\Psi$  un opérateur formel qui est une composition formelle de certains opérateurs de la forme  $C_{i',i}$  avec  $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$  et  $i' \in [k]$  tels que  $i' \neq i$ . On écrit  $\Psi = \prod_{i' \neq i} C_{i',i}$ . On dénote par  $\chi_w^{-1}(\Psi)$  l'opérateur formel suivant :

$$\chi_w^{-1}(\Psi) = \chi_w^{-1}\left(\prod_{i' \neq i} C_{i',i}\right) = \prod_{i' \neq i \text{ et } i' \neq \chi_w(i)} C_{i',\chi_w(i)}.$$

Par exemple, pour  $w = 416466$ ,  $\chi_w$  est l'unique bijection croissante de  $\{1, 4, 6\}$  vers  $[3]$ . Ainsi si  $\Psi = C_{2,4}C_{2,6}C_{3,6}$ , alors

$$\chi_w^{-1}(\Psi) = C_{2,3}.$$

Lorsqu'on transforme les arrangement  $\mathbf{a}_w$  et  $\mathbf{a}_w^{-\varnothing}$  en des tableaux de Young standards par la méthode de Robinson, on obtient le même tableau. Ce résultat est donné par le lemme suivant :

**Lemme 14** *Soit  $w \in \mathbb{P}^n$ , alors*

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-\varnothing}) \text{ et } \mathcal{B}_{w^{-\varnothing}} = \chi_w^{-1}(\mathcal{B}_w).$$

### Preuve

On procède par récurrence sur  $k$  où  $k$  est le nombre des lettres différentes de  $w$ . Remarquons que le nombre des lettres différentes de  $w^{-\varnothing}$  est aussi égal à  $k$  et que  $k$  est la plus grande lettre de  $w^{-\varnothing}$ . Soit  $i$  la plus grande lettre de  $w$ . Remarquons que si  $i = k$ , alors  $w = w^{-\varnothing}$  et  $\chi_w$  est l'identité, ce qui implique que  $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-\varnothing})$  et que  $\chi_w^{-1}(\mathcal{B}_w) = \mathcal{B}_w = \mathcal{B}_{w^{-\varnothing}}$ . Remarquons aussi que  $k$  est toujours inférieur ou égal à  $i$ . Alors dans toute la suite de cette preuve, on peut supposer que  $k < i$ .

Si  $k = 1$ , alors toutes les lettres de  $w$  sont égales à  $i$ . Donc  $w = i^n$  et  $w^{-\varnothing} = 1^n$ . En appliquant la méthode de Robinson à  $w$ , on obtient  $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(i^n) = 1^n = w^{-\varnothing} =$

$\mathcal{L}(w^{-\varnothing})$  car dans ce cas  $w^{-\varnothing}$  est un mot de Yamanouchi. Plus précisément, on applique à  $i^n$  la suite des  $n(i-1)$  réductions suivante :

$$\underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(2)}, \underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(2)}, \dots, \underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(2)}.$$

Remarquons que

$$\deg(i^n) - \deg(1^n) = ni - n = n(i-1).$$

Par la méthode de Robinson :  $\mathcal{B}_w = C_{1,i}^n$ . Comme  $\chi_w(i) = 1$ , alors  $\chi_w^{-1}(\mathcal{B}_w)$  est l'opérateur formel vide qui est l'opérateur  $\mathcal{B}_{w^{-\varnothing}}$  car dans ce cas  $w^{-\varnothing}$  est un mot de Yamanouchi et aucun déplacement n'a été effectué pour passer de  $\mathfrak{a}_{w^{-\varnothing}}$  au tableau de Young standard  $t_{w^{-\varnothing}}$  puisque  $t_{w^{-\varnothing}} = \mathfrak{a}_{w^{-\varnothing}}$ .

Supposons que cette propriété est vraie pour  $k-1$  et montrons la pour  $k$ . Soit  $w$  un mot de longueur  $n$  ayant  $k$  comme étant le nombre de ses lettres différentes. Soit  $i$  la plus grande lettre de  $w$  telle que  $i > k$  et soit  $w|_{[i-1]}$  le mot obtenu de  $w$  en supprimant dans  $w$  toutes les lettres égales à  $i$ . Lorsqu'on veut transformer  $w$ , par la méthode de Robinson, en un mot de Yamanouchi on commence par lui appliquer toutes les réductions nécessaires pour qu'il soit un mot de Yamanouchi sur  $[i-1]$ . Donc on commence par transformer  $w|_{[i-1]}$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w|_{[i-1]})$ . Comme le nombre des lettres différentes de  $w|_{[i-1]}$  est  $(k-1)$ , alors par l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{L}(w|_{[i-1]}) = \mathcal{L}\left((w|_{[i-1]})^{-\varnothing}\right) \text{ et } \mathcal{B}_{(w|_{[i-1]})^{-\varnothing}} = \chi_{w|_{[i-1]}}^{-1}\left(\mathcal{B}_{w|_{[i-1]}}\right).$$

Remarquons aussi que lorsqu'on veut transformer  $w^{-\varnothing}$  qui a  $k$  comme étant sa plus grande lettre et comme étant aussi le nombre de ses lettres différentes, par la méthode de Robinson, en un mot de Yamanouchi on commence par lui appliquer toutes les réductions nécessaires pour qu'il soit un mot de Yamanouchi sur  $[k-1]$ . Donc on commence par transformer  $w^{-\varnothing}|_{[k-1]}$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w^{-\varnothing}|_{[k-1]})$ . Comme  $(w|_{[i-1]})^{-\varnothing} = w^{-\varnothing}|_{[k-1]}$ , alors après toutes les réductions précédentes les mots obtenus respectivement à partir de  $w$  et de  $w^{-\varnothing}$ , qu'on note respectivement par  $w_1$  et  $w_2$ , sont des mots de Yamanouchi sur  $[i-1]$  et sur  $[k-1]$  et on a :

$$\mathcal{L}(w|_{[i-1]}) = \mathcal{L}\left((w|_{[i-1]})^{-\varnothing}\right) = \mathcal{L}(w^{-\varnothing}|_{[k-1]})$$

et

$$\mathcal{B}_{w^{-\emptyset}|_{[k-1]}} = \mathcal{B}_{(w|_{[i-1]})^{-\emptyset}} = \chi_{w|_{[i-1]}}^{-1} \left( \mathcal{B}_{w|_{[i-1]}} \right).$$

La seule différence entre les deux mots  $w_1$  et  $w_2$  obtenus après toutes les réductions précédentes est que les lettres égales à  $i$  dans  $w_1$  sont égales à  $k$  dans  $w_2$ . Donc, on a appliqué à  $w$  un certain nombre de réductions et on a obtenu le mot  $w_1$  qui est un mot de Yamanouchi sur  $[k-1]$  et qui n'a pas de lettres dans  $\{k, \dots, i-1\}$  et qui a  $i$  comme étant sa plus grande lettre. Supposons que le nombre de lettres égales à  $i$  dans  $w_1$  est  $m$  et que  $i-k = \ell$ . En appliquant à  $w_1$  la suite composée des  $m\ell$  réductions suivantes :

$$\underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(k+1)}, \underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(k+1)}, \dots, \underbrace{R(i), R(i-1), \dots, R(k+1)},$$

on obtient un mot qu'on note par  $w'_1$  qu'on peut obtenir de  $w_1$  en remplaçant chaque lettre égale à  $i$  par  $k$ . Le mot  $w'_1$  est identique à  $w_2$  qui est de Yamanouchi sur  $[k-1]$  et qui a  $k$  comme étant sa plus grande lettre. Par conséquent, dans les deux cas on a obtenu le même mot et lorsqu'on lui applique la méthode de Robinson, on obtient le même mot de Yamanouchi. Par conséquent,

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w_1) = \mathcal{L}(w'_1) = \mathcal{L}(w_2) = \mathcal{L}(w^{-\emptyset}).$$

En considérant les arrangements correspondants  $\mathbf{a}_{w_1}$  et  $\mathbf{a}_{w'_1}$ , on peut déduire que  $\mathbf{a}_{w'_1}$  a été obtenu de  $\mathbf{a}_{w_1}$  en lui appliquant la procédure incomplète de Robinson  $m$  fois et à chaque fois on effectue un ensemble de  $\ell$  déplacements de sorte que le premier déplacement a commencé de la ligne  $i$  et le dernier déplacement a terminé à la ligne  $k$ . Supposons que pour transformer  $\mathbf{a}_{w_2}$  par la méthode de Robinson au tableau de Young standard  $t_{w_2}$ ,  $m_1$  éléments parmi les  $m$  éléments de la  $k$ -ème ligne de  $\mathbf{a}_{w_2}$  ont resté dans la ligne  $k$  et  $m_2$  éléments ont quitté la ligne  $k$  respectivement vers les lignes  $s_1, s_2, \dots, s_{m_2}$  tels que  $\{s_1, s_2, \dots, s_{m_2}\} \subseteq [k-1]$  et  $m_1 + m_2 = m$ . Alors,

$$\mathcal{B}_{w^{-\emptyset}} = \mathcal{B}_{w^{-\emptyset}|_{[k-1]}} \cdot C_{s_1, k} C_{s_2, k} \cdots C_{s_{m_2}, k}.$$

Ce qui implique que

$$\mathcal{B}_w = \mathcal{B}_{w|_{[i-1]}} \cdot C_{s_1, i} C_{s_2, i} \cdots C_{s_{m_2}, i} C_{k, i}^{m_1}.$$

Comme  $\chi_w(i) = k$  et comme  $\chi_w(j) = \left(\chi_{w|_{[i-1]}}\right)(j)$  pour tout  $j \in [i-1]$ , alors

$$\begin{aligned}
 \chi_w^{-1}(\mathcal{B}_w) &= \chi_w^{-1}(\mathcal{B}_{w|_{[i-1]}}) \cdot \chi_w^{-1}(C_{s_1,i} C_{s_2,i} \cdots C_{s_{m_2},i} C_{k,i}^{m_1}) \\
 &= \chi_{w|_{[i-1]}}^{-1}(\mathcal{B}_{w|_{[i-1]}}) \cdot (C_{s_1,k} C_{s_2,k} \cdots C_{s_{m_2},k}) \\
 &= \mathcal{B}_{(w|_{[i-1]})^{-\emptyset}} \cdot C_{s_1,k} C_{s_2,k} \cdots C_{s_{m_2},k} \\
 &= \mathcal{B}_{w-\emptyset|_{[k-1]}} \cdot C_{s_1,k} C_{s_2,k} \cdots C_{s_{m_2},k} \\
 &= \mathcal{B}_{w-\emptyset}.
 \end{aligned}$$

□

Nous allons utiliser le lemme suivant pour montrer la proposition 25 précédente.

**Lemme 15** Soit  $w \in \mathbb{P}^n$  tel que l'ensemble des lettres différentes de  $w$  est  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

Alors

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(st_d(w)) \text{ et } \mathcal{B}_w = h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}).$$

**Preuve**

On procède par récurrence sur  $k$ .

Si  $k = 1$ , alors  $w = 1^n$  et donc  $\mathcal{L}(w) = 1^n$  et  $\mathcal{B}_w$  est l'opérateur formel vide. Dans ce cas  $st_d(w) = n \cdots 21$ . Pour transformer  $st_d(w)$ , par la méthode de Robinson, au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(st_d(w))$ , on lui applique la suite des  $\frac{n(n-1)}{2}$  réductions suivante :

$$\underbrace{R(2)}, \underbrace{R(3), R(2)}, \underbrace{R(4), R(3), R(2)}, \dots, \underbrace{R(n), \dots, R(2)}.$$

Ce qui implique que  $\mathcal{L}(st_d(w)) = 1^n = \mathcal{L}(w)$  et  $\mathcal{B}_{st_d(w)} = C_{1,2} C_{1,3} \cdots C_{1,n}$ . Comme  $h_w^{-1}(j) = 1$  pour tout  $j \in [n]$ , alors  $h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)})$  est l'opérateur formel vide. Ainsi  $\mathcal{B}_w = h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)})$ .

Remarquons que :

$$\deg(n \cdots 21) - \deg(1^n) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Supposons que cette propriété est vraie pour  $k-1$  et montrons la pour  $k$ . Soit  $w \in \mathbb{P}^n$  tel que l'ensemble des lettres différentes de  $w$  est  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Lorsqu'on veut transformer  $w$ ,

par la méthode de Robinson, en un mot de Yamanouchi on commence par lui appliquer toutes les réductions nécessaires pour qu'il soit un mot de Yamanouchi sur  $[k-1]$ . Donc on commence par transformer  $w|_{[k-1]}$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w|_{[k-1]})$ . Comme l'ensemble des lettres différentes de  $w|_{[k-1]}$  est  $\{1, \dots, k-1\}$ , alors par l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{L}(w|_{[k-1]}) = \mathcal{L}(st_d(w|_{[k-1]})) \text{ et } \mathcal{B}_{w|_{[k-1]}} = h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w|_{[k-1]})} \right).$$

Remarquons que  $|st_d(w|_{[k-1]})| = \rho$  tel que

$$\rho = |w|_1 + \dots + |w|_{k-1}.$$

Lorsqu'on veut transformer  $st_d(w) \in \mathcal{S}_n$ , par la méthode de Robinson, en un mot de Yamanouchi on commence par lui appliquer toutes les réductions nécessaires pour qu'il soit un mot de Yamanouchi sur  $[\rho]$ . Donc on commence par transformer  $st_d(w)|_{[\rho]}$  au mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(st_d(w)|_{[\rho]})$ . Comme

$$st_d(w|_{[k-1]}) = st_d(w)|_{[\rho]},$$

alors après toutes les réductions précédentes les mots obtenus respectivement à partir de  $w$  et de  $st_d(w)$ , qu'on note respectivement par  $w_1$  et  $w_2$ , sont des mots de Yamanouchi sur  $[k-1]$  et sur  $[\rho]$  et on a :

$$\mathcal{L}(w|_{[k-1]}) = \mathcal{L}(st_d(w|_{[k-1]})) = \mathcal{L}(st_d(w)|_{[\rho]})$$

et

$$\mathcal{B}_{w|_{[k-1]}} = h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w|_{[k-1]})} \right) = h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \right).$$

La seule différence entre  $w_1$  et  $w_2$  est que les  $|w|_k$  lettres égales à  $k$  dans  $w_1$  sont égales aux lettres  $\rho+1, \dots, \rho+|w|_k-1$ ,  $n$  et ceci de droite à gauche dans  $w_2$ . Supposons que  $\rho-k=\ell$ . Le mot  $w_2$  est un mot de Yamanouchi sur  $[k-1]$  et en lui appliquant la procédure de Robinson incomplète, on commence par lui appliquer la suite de réductions suivante :

$$R(\rho+1), R(\rho), \dots, R(k+1).$$



Le mot obtenu après ces réductions, qu'on note par  $w_{\rho+1}$ , peut être obtenu directement de  $w_2$  en remplaçant la lettre  $\rho+1$  par la lettre  $k$ . On lui applique la suite de réductions suivante :

$$R(\rho+2), R(\rho+1), \dots, R(k+1).$$

et on obtient un mot qu'on note par  $w_{\rho+2}$  qui peut être obtenu directement de  $w_{\rho+1}$  en remplaçant la lettre  $\rho+2$  par la lettre  $k$ . On continue à chaque fois d'appliquer des réductions de cette manière au mot obtenu jusqu'à ce que les lettres  $\rho+3, \dots, \rho+|w|_k-1, n$  deviennent toutes égales à  $k$ . Plus précisément, on applique les réductions suivantes :

$$\underbrace{R(\rho+3), \dots, R(k+1)}, \underbrace{R(\rho+4), \dots, R(k+1)}, \dots, \underbrace{R(n), \dots, R(k+1)}$$

et on obtient un mot qui est identique à  $w_1$ .

Par conséquent,

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w_1) = \mathcal{L}(w_2) = \mathcal{L}(st_d(w)).$$

En considérant les arrangements correspondants  $\mathbf{a}_{w_1}$  et  $\mathbf{a}_{w_2}$ , on peut déduire que  $\mathbf{a}_{w_1}$  a été obtenu de  $\mathbf{a}_{w_2}$  en lui appliquant la procédure incomplète de Robinson  $(n-\rho)$  fois (remarquons que  $n-\rho = |w|_k$ ). Pour tout  $j \in [n-\rho]$ , la  $j$ -ème fois on a effectué un ensemble de  $(\rho+j-k)$  déplacements de sorte que le premier déplacement a commencé de la ligne  $\rho+j$  et le dernier déplacement a terminé à la ligne  $k$ .

En utilisant l'interprétation géométrique de la standardisation à droite donnée au chapitre 2, on peut déduire que la  $k$ -ème ligne de  $\mathbf{a}_w$  est de longueur  $|w|_k$  et que ses éléments de gauche à droite sont :

$$(st_d(w))^{-1}(n), (st_d(w))^{-1}(n-1), \dots, (st_d(w))^{-1}(\rho+2) \text{ et } (st_d(w))^{-1}(\rho+1).$$

Remarquons aussi que l'arrangement  $\mathbf{a}_{w_1}$  est composé du tableau de Young standard  $t_{w_{|[k-1]}}$  et d'une  $k$ -ème ligne qui est identique à la  $k$ -ème ligne de  $\mathbf{a}_w$ . Supposons qu'en transformant l'arrangement  $\mathbf{a}_{w_1}$  au tableau de Young standard  $t_{w_1}$  par la méthode de Robinson, les  $m_1$  éléments

$$(st_d(w))^{-1}(\rho+q_{m_1}), (st_d(w))^{-1}(\rho+q_{m_1-1}), \dots, (st_d(w))^{-1}(\rho+q_1)$$

tels que  $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_{m_1} \leq n$  quitte la  $k$ -ème ligne de  $\mathfrak{a}_{w_i}$  respectivement vers les lignes  $s_{m_1}, s_{m_1-1}, \dots, s_2, s_1$  tels que  $\{s_1, \dots, s_{m_1}\} \subseteq [k-1]$ , alors que les  $(|w|_k - m_1)$  éléments de l'ensemble

$$\left\{ (st_d(w))^{-1}(n), \dots, (st_d(w))^{-1}(\rho+1) \right\} - \left\{ (st_d(w))^{-1}(\rho+q_{m_2}), \dots, (st_d(w))^{-1}(\rho+q_1) \right\}$$

reste dans cette  $k$ -ème ligne. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_w &= \mathcal{B}_{w|_{[k-1]}} \cdot \left( C_{s_1, k} C_{s_2, k} \cdots C_{s_{m_2}, k} \right) \\ &= \mathcal{B}_{w|_{[k-1]}} \cdot \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, k} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède

$$\mathcal{B}_{st_d(w)} = \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \cdot \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, \rho+q_i} \cdot \prod_{i \in [N_k(w)] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}} C_{k, \rho+i}.$$

Comme  $(h_{w|_{[k-1]}})(j) = h_w(j)$  pour tout  $j \in [\rho]$  et comme  $h_w^{-1}(\rho+i) = k$  pour tout  $i \in [|w|_k]$ , alors

$$\begin{aligned} h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}) &= h_w \left( \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \cdot \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, \rho+q_i} \cdot \prod_{i \in [N_k(w)] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}} C_{k, \rho+i} \right) \\ &= h_w \left( \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \right) \cdot h_w \left( \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, \rho+q_i} \right) \\ &\quad \cdot h_w \left( \prod_{i \in [N_k(w)] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}} C_{k, \rho+i} \right) \\ &= h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \right) \cdot h_w \left( \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, \rho+q_i} \right) \\ &\quad \cdot h_w \left( \prod_{i \in [N_k(w)] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}} C_{k, \rho+i} \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w)|_{[\rho]}} \right) &= h_{w|_{[k-1]}} \left( \mathcal{B}_{st_d(w|_{[k-1]})} \right) \\ &= \mathcal{B}_{w|_{[k-1]}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_w \left( \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, \rho+q_i} \right) &= \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, h_w^{-1}(\rho+q_i)} \\ &= \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, k}. \end{aligned}$$

et  $h_w \left( \prod_{i \in [N_k(w)] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}} C_{k, \rho+i} \right)$  est l'opérateur formel vide car  $h_w^{-1}(\rho + i) = k$  pour tout  $i \in [|w|_k] - \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}) &= \mathcal{B}_{w[|k|-1]} \cdot \prod_{i \in [m_1]} C_{s_i, k} \\ &= \mathcal{B}_w. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

Maintenant, on peut donner la preuve de la proposition suivante :

**Proposition 26** *Soit  $w \in \mathbb{P}^n$ . Alors*

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(st_d(w)) \text{ et } \mathcal{B}_w = h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}).$$

**Preuve**

Remarquons que  $st_d(w) = st_d(w^{-\emptyset})$ . Ainsi, d'après les deux lemmes 14 et 15 précédents, on a :

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-\emptyset}) = \mathcal{L}(st_d(w^{-\emptyset})) = \mathcal{L}(st_d(w)).$$

Montrons que  $\mathcal{B}_w = h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)})$ . Remarquons que

$$h_w = h_{w^{-\emptyset}} \circ \chi_w.$$

En effet, pour tout  $i \in [n]$ , si la lettre  $a_i$  est la  $i$ -ème lettre de  $w$ , alors  $h_w(a_i)$  est la  $i$ -ème lettre de  $st_d(w)$  et  $\chi_w(a_i)$  est la  $i$ -ème lettre de  $w^{-\emptyset}$  et donc  $h_{w^{-\emptyset}}(\chi_w(a_i))$  est la  $i$ -ème lettre de  $st_d(w^{-\emptyset})$ . Comme  $st_d(w) = st_d(w^{-\emptyset})$ , alors  $h_w(a_i) = h_{w^{-\emptyset}}(\chi_w(a_i))$  pour tout  $i \in [n]$ . Ce qui implique que  $h_w = h_{w^{-\emptyset}} \circ \chi_w$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}) &= (h_{w^{-\emptyset}} \circ \chi_w)(\mathcal{B}_{st_d(w)}) \\ &= (h_{w^{-\emptyset}} \circ \chi_w)(\mathcal{B}_{st_d(w^{-\emptyset})}). \end{aligned}$$

Comme  $(h_{w^{-\varnothing}} \circ \chi_w)^{-1} = \chi_w^{-1} \circ h_{w^{-\varnothing}}^{-1}$ . Alors, d'après les deux lemmes 14 et 15 précédents, on a :

$$\begin{aligned} h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}) &= \chi_w(h_{w^{-\varnothing}}(\mathcal{B}_{st_d(w^{-\varnothing})})) \\ &= \chi_w(\mathcal{B}_{w^{-\varnothing}}) \\ &= \chi_w(\chi_w^{-1}(\mathcal{B}_w)) \\ &= \mathcal{B}_w. \end{aligned}$$

□

Maintenant, on peut donner le corollaire suivant :

**Corollaire 6** (*Schützenberger*) Soit  $g$  un tableau gauche standard et soit  $J(g)$  le tableau de Young standard qui est le redressé de  $g$ . Alors

$$J(g) = P(\text{read}(g)).$$

### Preuve

Il suffit de montrer que

$$\omega(P(\text{read}(g))) = \omega(J(g)) :$$

Posons  $\omega_g(g) = w$ . On va utiliser le fait que  $\mathcal{L}(st_d(w)) = \mathcal{L}(w) = \mathcal{F}(w) = \omega(J(g))$  et le fait que  $\text{read}(g) = ((st_d(w))^{-1})^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \omega(P(\text{read}(g))) &= (\omega(P^T(\text{read}(g))))^T \\ &= \mathcal{B}^T(\text{read}(g)) \\ &= \mathcal{B}((\text{read}(g))^*) \\ &= \mathcal{L}(((\text{read}(g))^*)^{-1}) \\ &= \mathcal{L}(st_d(w)) \\ &= \mathcal{L}(w) = \mathcal{F}(w) = \omega(J(g)). \end{aligned}$$

□

Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . On lui associe un tableau gauche standard  $g$  tel que  $\omega_g(g) = w$ . On sait que  $\text{read}(g) = \left((st_d(w))^{-1}\right)^*$ . Remarquons que si on suppose que  $\omega(J(g)) = \omega(P(\text{read}(g)))$ , alors on peut montrer que  $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(st_d(w))$  pour tout  $w \in \mathbb{P}^n$ , sans l'utilisation des lemmes 14 et 15 précédents. En effet, on va utiliser le fait que  $\mathcal{F}(w) = \omega(J(g))$ . Comme  $st_d(w)$  est une permutation, alors en utilisant le résultat de van Leeuwen et le théorème 8 précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(st_d(w)) &= \omega(Q^T(st_d(w))) \\
 &= \omega\left(P^T\left((st_d(w))^{-1}\right)\right) \\
 &= \omega\left(P\left(\left((st_d(w))^{-1}\right)^*\right)\right) \\
 &= \omega(P(\text{read}(g))) \\
 &= \omega(J(g)) \\
 &= \mathcal{F}(w) \\
 &= \mathcal{L}(w).
 \end{aligned}$$

Maintenant, on donne la preuve de la proposition 25 précédente.

### Preuve

Comme  $st_d(w)$  est une permutation, alors par la proposition 26 précédente et par le résultat de van Leeuwen, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(w) &= \mathcal{L}(st_d(w)) \\
 &= \omega(Q^T(st_d(w))).
 \end{aligned}$$

On a aussi par le résultat de van Leeuwen, le lemme 15 et la proposition 26 précédente :

$$\begin{aligned}
 h_w(C(\omega(P^T(st_d(w)))))) &= h_w(C(\mathcal{B}(st_d(w)))) \\
 &= h_w(\mathcal{B}_{st_d(w)}) \\
 &= \mathcal{B}_w.
 \end{aligned}$$

□

**Remarque 9** D'après le corollaire 6 précédent,  $\omega(P(\text{read}(g))) = \omega(J(g)) = \mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w)$ . Ainsi on peut se poser la question suivante : que signifie  $Q(\text{read}(g))$  ?

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_w &= h_w(C(\omega(P^T(st_d(w)))))) \\
 &= h_w\left(C\left(\omega\left(P^T\left((\text{read}(g))^*\right)^{-1}\right)\right)\right) \\
 &= h_w(C(\omega(Q^T((\text{read}(g))^*)))) \\
 &= h_w(C(\omega(ev(Q(\text{read}(g)))))) \\
 &= h_w(C((\omega(Q(\text{read}(g))))^{ev})).
 \end{aligned}$$

À partir de cet opérateur formel, on peut obtenir toutes les réductions nécessaires de type  $R(k)$  pour passer de  $w$  à  $\mathcal{L}(w)$ . Comme une réduction de type  $R(k)$  signifie que pendant le redressement de  $g$  un élément s'est déplacé de la ligne  $k$  vers la ligne  $k-1$  à cause d'un glissement du jeu de taquin de Schützenberger. Alors cet opérateur nous donne tous les déplacements de ce type pour obtenir  $J(g)$  à partir de  $g$ .

La proposition suivante généralise la proposition 22 précédente des permutations aux mots arbitraires.

**Proposition 27** Pour tout  $w \in \mathbb{P}^*$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(w^*) &= ((\mathcal{L}(st_g(w)))^T)^{ev}, \mathcal{B}_{w^*} = f_w(C(\mathcal{B}^T(st_g(w)))), \\
 \mathcal{L}(w^{compl}) &= (\mathcal{L}(st_g(w)))^T, \mathcal{B}_{w^{compl}} = h_{w^{compl}}\left(C\left((\mathcal{B}(st_g(w)))^T\right)^{ev}\right), \\
 \mathcal{L}\left((w^{compl})^*\right) &= \mathcal{L}\left((w^*)^{compl}\right) = (\mathcal{L}(st_d(w)))^{ev}, \\
 \text{et } \mathcal{B}_{(w^{compl})^*} &= \mathcal{B}_{(w^*)^{compl}} = f_{w^{compl}}(C((\mathcal{B}(st_d(w)))^{ev})).
 \end{aligned}$$

Pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 16** Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ , alors

$$(st_g(w^{compl}))^{compl} = st_d(w).$$

### Preuve

On va utiliser les résultats suivants qu'on a déjà démontré :

$$\left(st_g(w^{\text{compl}})\right)^{-1} = \left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^* \text{ et } (st_g(w^*))^* = st_d(w)$$

et pour tout  $\sigma \in S_n$  :  $(\sigma^*)^{-1} = (\sigma^{-1})^{\text{compl}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \left(st_g(w^{\text{compl}})\right)^{\text{compl}} &= \left(\left(\left(st_g(w^{\text{compl}})\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{\text{compl}} \\ &= \left(\left(\left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^*\right)^{-1}\right)^{\text{compl}} \\ &= \left(\left(\left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^{\text{compl}} \\ &= \left(\left((st_g(w^*))^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^{-1} \\ &= \left(\left((st_g(w^*))^*\right)^{-1}\right)^{-1} \\ &= (st_g(w^*))^* \\ &= st_d(w). \end{aligned}$$

□

On peut aussi montrer géométriquement le résultat suivant qui est équivalent au résultat du lemme 16 précédent.

**Lemme 17** *Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Alors*

$$\left(st_d(w^{\text{compl}})\right)^{\text{compl}} = st_g(w).$$

### Preuve

La preuve de ce lemme est directe à partir de l'interprétation géométrique des standardisations à gauche et à droite donnée au chapitre 2 et du fait qu'on peut obtenir

l'arrangement  $\mathbf{a}_{w\text{compl}}$  à partir de  $\mathbf{a}_w$  en lui appliquant une réflexion par rapport à la droite horizontale passant en son milieu. Supposons que l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  a  $k$  lignes non vides qu'on note par  $(1) \longrightarrow, (2) \longrightarrow, \dots, (k) \longrightarrow$  de sorte que chaque ligne est croissante de gauche à droite comme l'indique le sens de la flèche  $\longrightarrow$ . En négligeant les lignes vides, on peut écrire

$$\mathbf{a}_w = \begin{array}{c} (k) \longrightarrow \\ (k-1) \longrightarrow \\ \vdots \\ (2) \longrightarrow \\ (1) \longrightarrow \end{array}.$$

Ainsi  $(k) \longrightarrow, (k-1) \longrightarrow, \dots, (1) \longrightarrow$  sont les  $k$  lignes non vides de l'arrangement  $\mathbf{a}_{w\text{compl}}$ . Donc, on peut aussi écrire

$$\mathbf{a}_{w\text{compl}} = \begin{array}{c} (1) \longrightarrow \\ (2) \longrightarrow \\ \vdots \\ (k-1) \longrightarrow \\ (k) \longrightarrow \end{array}.$$

D'une part,  $\mathbf{a}_{st_g(w)}$  est l'arrangement suivant :

$$\begin{array}{c} (k) \\ \downarrow \\ (k-1) \\ \downarrow \\ \vdots \\ (2) \\ \downarrow \\ (1) \\ \downarrow \end{array}$$



et d'autre part,  $\mathfrak{a}_{st_d(w \text{ compl})}$  est l'arrangement suivant :

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ (1) \\ \uparrow \\ (2) \\ \vdots \\ \uparrow \\ (k-1) \\ \uparrow \\ (k) \end{array}.$$

On peut remarquer facilement qu'on peut obtenir l'un des arrangements  $\mathfrak{a}_{st_g(w)}$  et  $\mathfrak{a}_{st_d(w \text{ compl})}$  à partir de l'autre en lui appliquant une réflexion par rapport à la droite horizontale passant en son milieu. Ce qui implique que

$$\mathfrak{a}_{(st_d(w \text{ compl})) \text{ compl}} = \mathfrak{a}_{st_g(w)}.$$

□

Maintenant, on peut donner la preuve de la proposition 27 précédente.

### Preuve

Soit  $w \in \mathbb{P}^*$ . Comme  $st_g(w) = (st_d(w^*))^*$ , alors en utilisant la proposition 22 et la proposition 26, on peut déduire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(st_g(w)) &= \mathcal{L}((st_d(w^*))^*) \\ &= \left( (\mathcal{L}(st_d(w^*)))^T \right)^{ev} \\ &= \left( (\mathcal{L}(w^*))^T \right)^{ev}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathcal{L}(w^*) = ((\mathcal{L}(st_g(w)))^{ev})^T = \left( (\mathcal{L}(st_g(w)))^T \right)^{ev}.$$

Comme  $h_{w^*} = f_w$ , alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{w^*} &= h_{w^*} (C (\omega (P^T (st_d (w^*)))))) \\
 &= f_w (C (\omega (P^T ((st_g (w))^*)))) \\
 &= f_w (C (\omega (P (st_g (w))))) \\
 &= f_w (C (\mathcal{B}^T (st_g (w)))) .
 \end{aligned}$$

Comme  $st_g (w)$  est une permutation, alors par le lemme 17 et la proposition 26, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} (w^{\text{compl}}) &= \mathcal{L} (st_d (w^{\text{compl}})) \\
 &= \mathcal{L} ((st_g (w))^{\text{compl}}) \\
 &= (\mathcal{L} (st_g (w)))^T .
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{w^{\text{compl}}} &= h_{w^{\text{compl}}} (C (\omega (P^T (st_d (w^{\text{compl}})))))) \\
 &= h_{w^{\text{compl}}} (C (\omega (P^T ((st_g (w))^{\text{compl}})))) \\
 &= h_{w^{\text{compl}}} (C (\omega (ev (P (st_g (w))))) \\
 &= h_{w^{\text{compl}}} (C ((\omega (P^T (st_g (w))))^T)^{ev})) \\
 &= h_{w^{\text{compl}}} (C ((\mathcal{B} (st_g (w)))^T)^{ev})) .
 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} ((w^*)^{\text{compl}}) &= (\mathcal{L} (st_g (w^*)))^T \\
 &= (\mathcal{L} ((st_d (w))^*))^T \\
 &= \left( \left( (\mathcal{L} (st_d (w)))^T \right)^{ev} \right)^T \\
 &= (\mathcal{L} (st_d (w)))^{ev}
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left( (w^{\text{compl}})^* \right) &= \left( \left( \mathcal{L} \left( st_g \left( w^{\text{compl}} \right) \right) \right)^{ev} \right)^T \\
 &= \left( \left( \mathcal{L} \left( (st_d(w))^{\text{compl}} \right) \right)^{ev} \right)^T \\
 &= \left( \left( \mathcal{L} (st_d(w)) \right)^T \right)^{ev} \\
 &= \mathcal{L} (st_d(w))^{ev}.
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{(w^{\text{compl}})^*} &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( \omega \left( P \left( st_g \left( w^{\text{compl}} \right) \right) \right) \right) \right) \\
 &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( \omega \left( P \left( (st_d(w))^{\text{compl}} \right) \right) \right) \right) \\
 &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( \omega \left( ev \left( P^T (st_d(w)) \right) \right) \right) \right) \\
 &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( \left( \omega \left( P^T (st_d(w)) \right) \right)^{ev} \right) \right) \\
 &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( (\mathcal{B} (st_d(w)))^{ev} \right) \right).
 \end{aligned}$$

De même, comme  $h_{(w^*)^{\text{compl}}} = h_{(w^{\text{compl}})^*} = f_{w^{\text{compl}}}$ , alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{(w^*)^{\text{compl}}} &= h_{(w^*)^{\text{compl}}} \left( C \left( \left( (\mathcal{B} (st_g(w^*)))^T \right)^{ev} \right) \right) \\
 &= h_{(w^*)^{\text{compl}}} \left( C \left( \left( (\mathcal{B} ((st_d(w))^*)^T) \right)^{ev} \right) \right) \\
 &= h_{(w^*)^{\text{compl}}} \left( C \left( (\mathcal{B} (st_d(w)))^{ev} \right) \right) \\
 &= f_{w^{\text{compl}}} \left( C \left( (\mathcal{B} (st_d(w)))^{ev} \right) \right).
 \end{aligned}$$

□

Thomas dans (Thomas, 1976, page 667) a posé le problème de trouver le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  à partir du mot  $w$ . Il a suggérer de passer aux permutations et d'utiliser l'algorithme de Schensted. Le théorème suivant donne une réponse à cette question.

**Théorème 12** *Soit  $w \in \mathbb{P}^n$ . Le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  est :*

$$\sum_{i=1, \alpha_i \neq i}^n (h_w^{-1}(i) - \alpha_i)$$

où  $\alpha_i$  est le nombre de points de  $Sq^*((st_d(w))^*)$  ayant une ordonnée égale à  $i$  qui est aussi la  $i$ -ème lettre du mot de Yamanouchi  $\omega(P((st_d(w))^*))$ .

### Preuve

Par la proposition 25 précédente, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_w &= h_w(C(\omega(P^T(st_d(w)))))) \\ &= h_w(C(\omega(P((st_d(w))^*)))) . \end{aligned}$$

Par l'algorithme élaboré à la section 3.4 donnant la bijection de Schensted entre les permutations de  $[n]$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme  $\lambda \vdash n$ , on a :

$$\omega(P((st_d(w))^*)) = \mathcal{I}_{(st_d(w))^*}(0^n) .$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}_w = h_w(C(\mathcal{I}_{(st_d(w))^*}(0^n))) .$$

Soit  $\mathcal{I}_{(st_d(w))^*}(0^n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_w &= h_w(C(\alpha_1 \cdots \alpha_n)) \\ &= h_w\left(\prod_{i \in [n], \alpha_i \neq i} C_{\alpha_i, i}\right) \\ &= \prod_{i \in [n], \alpha_i \neq i \text{ et } \alpha_i \neq h_w^{-1}(i)} C_{\alpha_i, h_w^{-1}(i)} . \end{aligned}$$

Ce qui implique que le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  est :

$$\sum_{i=1, \alpha_i \neq i}^n (h_w^{-1}(i) - \alpha_i).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout  $i \in [n]$ , l'entier  $\alpha_i$  est la  $i$ -ème lettre du mot de Yamanouchi  $\omega(P((st_d(w))^*))$  et par la construction géométrique de Viennot, l'entier  $\alpha_i$  est le nombre de points de  $Sq^*((st_d(w))^*)$  ayant une ordonnée égale à  $i$ .

□

Reprenons l'exemple donné au début de la section 4.1 précédente où le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w) = 121123312$  à partir du mot  $w = 231124313$  était 4. Comme  $st_d(w) = 583249716$ , alors  $h_w^{-1}(1) = 1$ ,  $h_w^{-1}(2) = 1$ ,  $h_w^{-1}(3) = 1$ ,  $h_w^{-1}(4) = 2$ ,  $h_w^{-1}(5) = 2$ ,  $h_w^{-1}(6) = 3$ ,  $h_w^{-1}(7) = 3$ ,  $h_w^{-1}(8) = 3$  et  $h_w^{-1}(9) = 4$ . On peut vérifier aussi que

$$\omega(P((st_d(w))^*)) = \omega(P(617942385)) = \omega \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 9 & & \\ \hline 4 & 7 & 8 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \right) = 111213223 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_9.$$

En utilisant la formule donnée au théorème précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, \alpha_i \neq i}^9 (h_w^{-1}(i) - \alpha_i) &= (h_w^{-1}(2) - \alpha_2) + (h_w^{-1}(3) - \alpha_3) + \dots + (h_w^{-1}(9) - \alpha_9) \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (4 - 3) \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

## 4.6 Expression de l'évacué d'un mot de Yamanouchi en utilisant l'opérateur de Robinson $w \mapsto \mathcal{L}(w)$

Dans toute la suite de cette thèse, on va utiliser la notation suivante :

Soient  $u$  et  $v$  deux mots de Yamanouchi tels que  $|u| = |v| + 1$ . Soit  $u'$  un mot obtenu de  $u$  en supprimant une seule lettre  $a$  de  $u$  de sorte que  $u'$  et  $v$  ont les mêmes lettres mais pas nécessairement dans le même ordre. Alors, on écrit

$$u - v = a.$$

Par exemple,  $112132213 - 12132113 = 2$ . En utilisant, cette notation on peut montrer le théorème suivant :

**Théorème 13** *Pour tout mot de Yamanouchi  $u = a_1 \cdots a_n$ , l'évacué de  $u$  est défini comme suit :*

$$u^{ev} = z_1 \cdots z_n$$

où pour chaque  $i \in [n]$  :

$$\begin{aligned} z_i &= \mathcal{L}(a_{n-i+1} \cdots a_n) - \mathcal{L}(a_{n-i+2} \cdots a_n) \\ &= \mathcal{L}(\text{suff}_i(u)) - \mathcal{L}(\text{suff}_{i-1}(u)) \\ &= \mathcal{F}(\text{suff}_i(u)) - \mathcal{F}(\text{suff}_{i-1}(u)). \end{aligned}$$

### Preuve

Il suffit d'appliquer l'algorithme d'évacuation à  $u$  et de remarquer que par l'algorithme de redressement la suite de mots de Yamanouchi  $u, u', \dots$  dans l'algorithme d'évacuation n'est que la suite de mots de Yamanouchi

$$u = \mathcal{F}(u), u' = \mathcal{F}(a_2 \cdots a_n) = \mathcal{F}(\text{suff}_{n-1}(u)), \dots, \mathcal{F}(a_n) = \mathcal{F}(\text{suff}_1(u)) = 1.$$

Pour tout  $i \in [n]$ , la lettre  $z_i$  dans l'algorithme d'évacuation est une lettre du mot  $\mathcal{F}(a_{n-i+1} \cdots a_n)$  qui est défini de sorte que le mot obtenu de  $\mathcal{F}(a_{n-i+1} \cdots a_n)$  en supprimant cette lettre  $z_i$  et le mot de Yamanouchi  $\mathcal{F}(a_{n-i+2} \cdots a_n)$  ont les mêmes lettres mais pas nécessairement dans le même ordre. Ce qui implique que pour tout  $i \in [n]$  :

$$z_i = \mathcal{F}(a_{n-i+1} \cdots a_n) - \mathcal{F}(a_{n-i+2} \cdots a_n)$$

Pour terminer la preuve de ce théorème. il suffit d'utiliser le théorème 8 précédent.

□

Le corollaire suivant découle directement du théorème 13 précédent. Il donne un résultat sur les mots de Yamanouchi équivalent au résultat démontré par M. A. A. van Leewen pour les tableaux de Young standards ((van Leeuwen, 1992), lemme 6.3, page 36). Plus précisément, van Leewen a montré que si  $t_1, t_2$  sont deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments tels que

$$\exists k \in [n] : t_1| [n - k + 1, n] = t_2| [n - k + 1, n],$$

alors

$$(ev(t_1))| [k] = (ev(t_2))| [k].$$

**Corollaire 7** *Soient  $w_1, w_2$  deux mots de Yamanouchi de longueur  $n$  tels que*

$$\exists k \in [n] : suff_k(w_1) = suff_k(w_2).$$

*Alors*

$$pref_k((w_1)^{ev}) = pref_k((w_2)^{ev})$$

### Preuve

La preuve de ce corollaire découle directement de l'application de la définition, du mot évacué d'un mot de Yamanouchi, donnée au théorème 13 précédent. Comme  $suff_k(w_1) = suff_k(w_2)$ , alors la suite de mots

$$\mathcal{L}(suff_k(w_1)), \mathcal{L}(suff_{k-1}(w_1)), \dots, \mathcal{L}(suff_1(w_1))$$

coincide avec la suite de mots

$$\mathcal{L}(suff_k(w_2)), \mathcal{L}(suff_{k-1}(w_2)), \dots, \mathcal{L}(suff_1(w_2)).$$

Soient  $(w_1)^{ev} = z_1 \dots z_n$  et  $(w_2)^{ev} = z'_1 \dots z'_n$ . Pour tout  $i \in [k]$ , on a :

$$\begin{aligned} z_i &= \mathcal{L}(suff_i(w_1)) - \mathcal{L}(suff_{i-1}(w_1)) \\ &= \mathcal{L}(suff_i(w_2)) - \mathcal{L}(suff_{i-1}(w_2)) \\ &= z'_i. \end{aligned}$$

□

## 4.7 Nouvelle formule pour la correspondance de Schensted

Pour tout  $n \in \mathbb{P}$ , soient  $x_n$  et  $y_n$  les mots de Yamanouchi, de longueur  $\frac{n(n-1)}{2}$ , suivants :

$$x_n = \underbrace{12 \cdots (n-1)}_{\text{}} \underbrace{12 \cdots (n-2)}_{\text{}} \cdots \underbrace{12}_{\text{}} \underbrace{1}_{\text{}}$$

et

$$y_n = \underbrace{11 \cdots 1}_{\text{}} \underbrace{22 \cdots 2}_{\text{}} \cdots \underbrace{(n-2)(n-2)}_{\text{}} \underbrace{(n-1)}_{\text{}}$$

tels que :

$$|x_n|_i = |y_n|_i = n - i \text{ pour tout } i \in [n-1].$$

Remarquons que  $x_n^T = y_n$ . Par exemple,  $x_5 = 1234123121$  et  $y_5 = 1111222334$ .

Remarquons aussi que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , les mots  $x_n\sigma$  et  $y_n\sigma$  sont des mots de Yamanouchi et on a :

$$(y_n\sigma)^T = x_n(\omega_{0,n} \circ \sigma) = x_n\sigma^{\text{compl}} \text{ et } (x_n\sigma)^T = y_n(\omega_{0,n} \circ \sigma) = y_n\sigma^{\text{compl}}.$$

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  telle que  $\pi(\sigma) = (P(\sigma), Q(\sigma))$  où  $\pi$  est la correspondance de Schensted entre les permutations et les tableaux de Young standards. La proposition suivante donne les deux mots de Yamanouchi associés respectivement à  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$ .

**Proposition 28** *Pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,*

$$\omega(P(\sigma)) = \left( (\text{préf}_n((y_n\sigma^{-1})^{ev}))^{ev} \right)^T \text{ et } \omega(Q(\sigma)) = ((\text{préf}_n((y_n\sigma)^{ev}))^{ev})^T.$$

Notons qu'on peut donner cette proposition avec  $x_n$  à la place de  $y_n$ .

### Preuve

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Comme  $y_n\sigma$  est un mot de Yamanouchi et comme  $|\sigma| = n$ , alors par le lemme 8 précédent, on a :

$$\mathcal{F}(\sigma) = (\text{préf}_n((y_n\sigma)^{ev}))^{ev}.$$



Mais par le théorème 8 précédent et le résultat de van Leeuwen, on a :

$$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{L}(\sigma) = \omega(Q^T(\sigma)) = (\omega(Q(\sigma)))^T.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\omega(Q(\sigma)) &= (\mathcal{F}(\sigma))^T \\ &= ((\text{préf}_n((y_n\sigma)^{ev}))^{ev})^T.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\omega(P(\sigma)) &= \omega(Q(\sigma^{-1})) \\ &= (\mathcal{L}(\sigma^{-1}))^T \\ &= (\mathcal{F}(\sigma^{-1}))^T \\ &= ((\text{préf}_n((y_n\sigma^{-1})^{ev}))^{ev})^T.\end{aligned}$$

□

Il est clair que si  $\pi(\sigma) = (u, v)$ , alors  $\pi(\sigma^{-1}) = (v, u)$ . Maintenant, nous allons utiliser le résultat de cette proposition pour montrer le résultat bien connu suivant :

$$P(\sigma^*) = P^T(\sigma) \text{ et } Q(\sigma^*) = Q^T(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) = Q^T((\sigma^{\text{compl}})^*) = Q^T((\sigma^*)^{\text{compl}}).$$

En effet, il suffit de montrer que

$$\omega(P(\sigma^*)) = \omega(P^T(\sigma)) \text{ et } \omega(Q(\sigma^*)) = \omega(Q^T(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})).$$

Comme les opérations de transposition et d'évacuation commutent et comme pour tout

$u \in \mathbb{P}^*$  et pour tout  $k \leq |u|$ ,  $(\text{préf}_k(u))^T = \text{préf}_k(u^T)$ , alors

$$\begin{aligned}
\omega(P(\sigma^*)) &= \omega(Q((\sigma^*)^{-1})) \\
&= (\mathcal{F}((\sigma^*)^{-1}))^T \\
&= \left( \left( \text{préf}_n \left( (y_n(\sigma^*)^{-1})^{ev} \right) \right)^{ev} \right)^T \\
&= \left( \left( \text{préf}_n \left( \left( (y_n(\sigma^*)^{-1})^{ev} \right)^T \right) \right)^{ev} \right) \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( \left( (y_n(\sigma^*)^{-1})^{ev} \right)^T \right) \right)^{ev} \right) \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( \left( (y_n(\sigma^*)^{-1})^T \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \right) \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( \omega_{0,n} \circ (\sigma^*)^{-1} \right) \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( \omega_{0,n} \circ (\sigma \circ \omega_{0,n})^{-1} \right) \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= (\text{préf}_n((x_n \sigma^{-1})^{ev}))^{ev} \\
&= \mathcal{F}(\sigma^{-1}) \\
&= \mathcal{L}(\sigma^{-1}) \\
&= \omega(Q^T(\sigma^{-1})) \\
&= \omega(P^T(\sigma)). \quad - \quad - \quad - \quad -
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\omega(Q(\sigma^*)) &= (\mathcal{F}(\sigma^*))^T \\
&= ((\text{préf}_n((y_n \sigma^*)^{ev}))^{ev})^T \\
&= \left( (\text{préf}_n((y_n \sigma^*)^{ev}))^T \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( ((y_n \sigma^*)^{ev})^T \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( (y_n \sigma^*)^T \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= (\text{préf}_n((x_n(\omega_{0,n} \circ \sigma^*))^{ev}))^{ev} \\
&= (\text{préf}_n((x_n(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^{ev}))^{ev} \\
&= \mathcal{F}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(Q(\sigma^*)) &= \mathcal{L}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) \\
&= \omega(Q^T(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})).
\end{aligned}$$

Nous allons aussi utiliser le résultat de cette proposition pour montrer que :

$$P(\sigma^{\text{compl}}) = P^T(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}) = P^T((\sigma^{\text{compl}})^*) = P^T((\sigma^*)^{\text{compl}})$$

et

$$Q(\sigma^{\text{compl}}) = Q^T(\sigma).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\omega(P(\sigma^{\text{compl}})) &= \omega\left(Q\left((\sigma^{\text{compl}})^{-1}\right)\right) \\
&= \omega\left(Q\left((\sigma^{-1})^*\right)\right) \\
&= \left(\mathcal{L}\left((\sigma^{-1})^*\right)\right)^T \\
&= \left(\mathcal{F}\left((\sigma^{-1})^*\right)\right)^T \\
&= \left(\left(\text{préf}_n\left(\left(y_n(\sigma^{-1})^*\right)^{ev}\right)\right)^{ev}\right)^T \\
&= \left(\left(\text{préf}_n\left(\left(y_n(\sigma^{-1})^*\right)^{ev}\right)\right)^T\right)^{ev} \\
&= \left(\text{préf}_n\left(\left(\left(y_n(\sigma^{-1})^*\right)^{ev}\right)^T\right)\right)^{ev} \\
&= \left(\text{préf}_n\left(\left(\left(y_n(\sigma^{-1})^*\right)^T\right)^{ev}\right)\right)^{ev} \\
&= \left(\text{préf}_n\left(\left(x_n\left((\sigma^{-1})^*\right)^{\text{compl}}\right)^{ev}\right)\right)^{ev} \\
&= \left(\text{préf}_n\left(\left(x_n\left((\sigma^{\text{compl}})^{-1}\right)^{\text{compl}}\right)^{ev}\right)\right)^{ev} \\
&= \left(\text{préf}_n\left(\left(x_n\left((\sigma^{\text{compl}})^*\right)^{-1}\right)^{ev}\right)\right)^{ev} \\
&= \mathcal{F}\left(\left((\sigma^{\text{compl}})^*\right)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega \left( P \left( \sigma^{\text{compl}} \right) \right) &= \mathcal{L} \left( \left( \left( \sigma^{\text{compl}} \right)^* \right)^{-1} \right) \\
&= \omega \left( Q^T \left( \left( \left( \sigma^{\text{compl}} \right)^* \right)^{-1} \right) \right) \\
&= \omega \left( P^T \left( \left( \sigma^{\text{compl}} \right)^* \right) \right) \\
&= \omega \left( P^T \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n} \right) \right).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\omega \left( Q \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right) &= \left( \mathcal{F} \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^T \\
&= \left( \left( \text{préf}_n \left( \left( y_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \right)^T \\
&= \left( \left( \text{préf}_n \left( \left( y_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^{ev} \right) \right)^T \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^{ev} \right)^T \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^T \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( \omega_{0,n} \circ \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right) \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( x_n \sigma \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= \mathcal{F} \left( \sigma \right) \\
&= \omega \left( Q^T \left( \sigma \right) \right).
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\left( \omega \left( Q \left( \sigma \right) \right) \right)^{ev} &= \left( \left( \mathcal{F} \left( \sigma \right) \right)^T \right)^{ev} \\
&= \left( \left( \left( \text{préf}_n \left( \left( y_n \sigma \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \right)^T \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( y_n \sigma \right)^{ev} \right) \right)^T \\
&= \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \sigma \right)^{ev} \right)^T \right) \\
&= \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \sigma \right)^T \right)^{ev} \right) \\
&= \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^{ev} \right) \\
&= \left( \left( \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( \omega_{0,n} \circ \sigma \right) \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \right)^{ev}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\omega(Q(\sigma)))^{ev} &= (\mathcal{F}(\omega_{0,n} \circ \sigma))^{ev} \\
&= \left( \mathcal{F}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev} \\
&= \left( \mathcal{L}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev}
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\omega(Q(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})) &= (\mathcal{F}(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^T \\
&= ((\text{préf}_n((y_n(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^{ev}))^{ev})^T \\
&= \left( (\text{préf}_n((y_n(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^{ev}))^T \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( ((y_n(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^{ev})^T \right) \right)^{ev} \\
&= \left( \text{préf}_n \left( \left( (y_n(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n}))^T \right)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&= (\text{préf}_n((x_n(\sigma \circ \omega_{0,n}))^{ev}))^{ev} \\
&= \mathcal{F}(\sigma \circ \omega_{0,n}) \\
&= \mathcal{F}(\sigma^*) \\
&= \mathcal{L}(\sigma^*)
\end{aligned}$$

Pour montrer que  $\omega(Q(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})) = (\omega(Q(\sigma)))^{ev}$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{L}(\sigma^*) = \left( \mathcal{L}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev}$ . Ce qui est équivalent à montrer que

$$(\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev} = \text{préf}_n \left( (y_n(\sigma^*)^{\text{compl}})^{ev} \right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left[ \mathcal{L}(\sigma^*) = \left( \mathcal{L}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev} \right] &\Leftrightarrow \mathcal{F}(\sigma^*) = \left( \mathcal{F}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev} \\
&\Leftrightarrow (\text{préf}_n((x_n(\sigma^*))^{ev}))^{ev} = \text{préf}_n \left( (x_n \sigma^{\text{compl}})^{ev} \right) \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n((x_n(\sigma^*))^{ev}) = \left( \text{préf}_n \left( (x_n \sigma^{\text{compl}})^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( x_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right)^{\text{compl}} \right)^{ev} \right) = \left( \text{préf}_n \left( ((y_n \sigma)^T)^{ev} \right) \right)^{ev} \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( (y_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right))^T \right)^{ev} \right) = \left( \text{préf}_n \left( ((y_n \sigma)^{ev})^T \right) \right)^{ev}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathcal{L}(\sigma^*) = \left( \mathcal{L}(\sigma^{\text{compl}}) \right)^{ev} \right] &\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right) \right)^T \right)^{ev} \right) = ((\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev})^T \\
&\Leftrightarrow \left( \text{préf}_n \left( \left( \left( y_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right) \right)^T \right)^{ev} \right) \right)^T = (\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev} \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( \left( \left( y_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right) \right)^T \right)^{ev} \right)^T \right) = (\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev} \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( y_n \left( (\sigma^*)^{\text{compl}} \right) \right)^{ev} \right) = (\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev} \\
&\Leftrightarrow \text{préf}_n \left( \left( y_n (\sigma^*)^{\text{compl}} \right)^{ev} \right) = (\text{préf}_n((y_n \sigma)^{ev}))^{ev}.
\end{aligned}$$

La preuve de cette identité reste un problème ouvert.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
(\omega(P(\sigma)))^{ev} &= (\omega(Q(\sigma^{-1})))^{ev} \\
&= \left( \mathcal{L} \left( (\sigma^{-1})^{\text{compl}} \right) \right)^{ev}
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\omega(P(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})) &= \omega \left( Q \left( (\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})^{-1} \right) \right) \\
&= \omega \left( Q \left( \omega_{0,n} \circ \sigma^{-1} \circ \omega_{0,n} \right) \right) \\
&= \mathcal{L} \left( (\sigma^{-1})^* \right)
\end{aligned}$$

---  
 Pour montrer que  $\omega(P(\omega_{0,n} \circ \sigma \circ \omega_{0,n})) = (\omega(P(\sigma)))^{ev}$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{L}((\sigma^{-1})^*) = \left( \mathcal{L}((\sigma^{-1})^{\text{compl}}) \right)^{ev}$  et ceci découle de l'identité précédente une fois démontrée. ---

## CHAPITRE V

### SUR UNE CONJECTURE DE SCHÜTZENBERGER

Dans ce chapitre, nous poserons une nouvelle conjecture ayant un lien étroit avec la correspondance de Schensted et avec une conjecture de Schützenberger ((Schützenberger, 1976), page 85). Nous montrerons que la résolution de cette nouvelle conjecture implique la résolution de celle de Schützenberger. Ensuite, nous montrerons cette nouvelle conjecture dans le cas particulier, en utilisant l'algorithme donnant la correspondance de Schensted entre les permutations et les mots de Yamanouchi de même forme que nous avons élaboré à la section 3.4 précédente, des tableaux de Young standards ayant seulement deux lignes. Finalement, nous donnerons une nouvelle preuve pour le théorème de Foata qui démontre la conjecture de Schützenberger dans un cas particulier.

#### 5.1 Conjecture de Schützenberger

Schützenberger a introduit l'opération d'évacuation des tableaux de Young standards dans ((Schützenberger, 1963), page 127). Il a aussi donné plusieurs propriétés de cette opération dans (Schützenberger, 1976) où il a posé la conjecture suivante ((Schützenberger, 1976), page 85) :

**Conjecture 2** *Conjecture de Schützenberger : Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments, avec  $n \geq 3$ , ne différant que par la position de deux entiers consécutifs ; soient  $ev(T)$  et  $ev(S)$  les tableaux obtenus en appliquant à  $T$  et à  $S$  l'opération d'évacuation. Alors  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par une permutation*

$\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire.

D. Foata a démontré cette conjecture dans le cas où les deux tableaux  $T$  et  $S$  ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers (Foata, 1976) et il a même précisé la nature du cycle de la permutation en démontrant que c'est un cycle en équerre. Rappelons qu'une permutation est un cycle en équerre si en l'écrivant sous forme de cycles elle est de la forme  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  avec  $a_1 < a_2 < \dots < a_j > a_{j+1} > \dots > a_n$  pour un certain  $j \leq n$ , où  $a_1$  est le plus petit élément de tous les éléments du cycle. Rappelons aussi que le support d'une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , qu'on note par  $\text{Support}(\sigma)$ , est l'ensemble des éléments de  $[n]$  qui ne sont pas fixés par  $\sigma$ , c'est-à-dire

$$\text{Support}(\sigma) = \{i \in [n] \mid \sigma(i) \neq i\}.$$

M. Desgroseilliers et *al*, dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008), ont démontré cette conjecture dans le cas où chacun des deux tableaux  $T$  et  $S$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments ayant un seul coin intérieur. Plus précisément, ils ont montré que si  $T$  et  $S$  sont deux tableaux ayant un seul coin intérieur qui ne diffèrent que par la position des deux entiers  $i$  et  $i + 1$ , alors  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par la position des deux entiers  $n - i$  et  $n - i + 1$ . Ils ont aussi montré que si  $S$  et  $T$  sont deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments, avec  $n \geq 3$ , ne différant que par la position de deux entiers consécutifs et  $ev(S)$  et  $ev(T)$ , les tableaux obtenus en appliquant à  $S$  et à  $T$  l'opération d'évacuation, ne diffèrent que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle, alors le cycle  $\alpha$  est forcément de longueur paire. Pour montrer ce résultat, ils ont utilisé un résultat de A. Reifegerste donné au théorème 4.3 dans (Reifegerste, 2004) qui donne le nombre d'inversions de la permutation en fonction de son  $P$ -symbole et de son  $Q$ -symbole.

## 5.2 Nouvelle conjecture

En essayant de résoudre la conjecture de Schützenberger, nous avons posé la nouvelle conjecture suivante qui a un lien étroit avec la correspondance de Schensted :



**Conjecture 3 Nouvelle conjecture :** Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards ne différant que par la position de leurs deux plus grands entiers. Soit  $Q$  un tableau de Young standard de même forme. Alors les deux permutations  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$  où  $\pi$  est la correspondance de Schensted, ne diffèrent comme mots que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire, c'est-à-dire  $\alpha \circ \sigma = \tau$ .

En d'autres mots, deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ayant le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers vérifient  $\alpha \circ \sigma = \tau$  avec  $\alpha$  un cycle de longueur paire.

**Exemple 1** Soient  $T$ ,  $S$  et  $Q$  les tableaux de Young standards suivants :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 14 & 16 & \\ \hline 5 & 9 & 12 & 15 \\ \hline 2 & 7 & 8 & 13 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ \hline \end{array}, S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 14 & 15 & \\ \hline 5 & 9 & 12 & 16 \\ \hline 2 & 7 & 8 & 13 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 13 & 16 & \\ \hline 6 & 11 & 14 & 15 \\ \hline 4 & 9 & 10 & 12 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ \hline \end{array}.$$

Les tableaux  $T$  et  $S$  ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers 15 et 16. Le tableau  $Q$  est de même forme que les tableaux  $T$  et  $S$ . Posons  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$ . Alors

$$\sigma = 2 \ 5 \ 11 \ 9 \ 14 \ 3 \ 1 \ 16 \ 7 \ 12 \ 8 \ 15 \ 4 \ 6 \ 13 \ 10$$

et

$$\tau = 2 \ 11 \ 14 \ 5 \ 15 \ 3 \ 1 \ 16 \ 9 \ 12 \ 7 \ 13 \ 4 \ 8 \ 10 \ 6.$$

On a :  $\alpha \circ \sigma = \tau$  tel que  $\alpha$  est le cycle de longueur 10 suivant :

$$\alpha = (5 \ 11 \ 14 \ 15 \ 13 \ 10 \ 6 \ 8 \ 7 \ 9).$$

Dans cet exemple, on peut remarquer que le cycle  $\alpha$  n'est pas un cycle en équerre. Par conséquent, cet exemple montre que le cycle  $\alpha$  donné dans cette nouvelle conjecture n'est pas nécessairement un cycle en équerre.

Remarquons que cette nouvelle conjecture peut être donnée de la manière suivante : deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ayant le même  $P$ -symbole et leurs  $Q$ -symboles ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers vérifient  $\sigma \circ \beta = \tau$  avec  $\beta$  un cycle de longueur paire. En effet, les deux permutations  $\sigma^{-1}$  et  $\tau^{-1}$  ont le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers et donc par la nouvelle conjecture précédente  $\alpha \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1}$  avec  $\alpha$  un cycle de longueur paire. Ainsi  $\tau = (\alpha \circ \sigma^{-1})^{-1} = \sigma \circ \alpha^{-1}$  et il suffit de poser  $\beta = \alpha^{-1}$ .

Notons qu'on a vérifié cette nouvelle conjecture par ordinateur pour tous les tableaux à  $n$  éléments avec  $n \leq 11$  avec l'aide de Jérôme Tremblay et Sébastien Labbé.

Dans la section suivante, on va montrer que la résolution de cette nouvelle conjecture implique la résolution de la conjecture de Schützenberger.

On peut montrer que si le cycle  $\alpha$  existe, alors il est forcément de longueur paire. Plus précisément, on peut donner le résultat suivant dont la preuve s'inspire de Desgroseilliers et al :

**Proposition 29** *Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards ne différant que par la position de leurs deux plus grands entiers. Soit  $Q$  un tableau de Young standard de même forme. Supposons que les deux permutation  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$  où  $\pi$  est la correspondance de Schensted, ne diffèrent comme mots que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle, c'est-à-dire  $\alpha \circ \sigma = \tau$  avec  $\alpha$  une permutation circulaire. Alors le cycle  $\alpha$  est de longueur paire.*

Rappelons qu'une paire d'entiers positifs  $(i, j)$  est une inversion d'un tableau de Young standard  $T$  si  $i < j$  et si  $i$  se trouve dans  $T$  dans une ligne située strictement en bas de la ligne contenant  $j$ . On note par  $inv(T)$  le nombre d'inversion de  $T$  et on définit la signature du tableau  $T$  comme suit :

$$sign(T) = (-1)^{inv(T)}.$$

Par exemple, le tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 2 & 7 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

a 13 inversions qui sont :

$$(1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (2, 5), (2, 6) \text{ et } (5, 6).$$

Ainsi  $\text{sign}(T) = (-1)^{13} = -1$ .

On peut définir la signature d'un tableau de Young standard  $T$  d'une manière équivalente comme suit :

$$\text{sign}(T) = \text{sign}(\text{read}(T)).$$

### Preuve

Comme les tableaux de Young standards  $T$ ,  $S$  et  $Q$  ont la même forme, alors en utilisant le théorème 4.3 donné dans (Reifegerste, 2004) on obtient :

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(T) \times \text{sign}(Q) \times (-1)^e \text{ et } \text{sign}(\tau) = \text{sign}(S) \times \text{sign}(Q) \times (-1)^e$$

où  $e$  est la somme des longueurs des lignes indexées par un entier pair du tableau  $T$ . Par exemple pour le tableau  $T$  donné ci-dessus, on a  $e = 3$  car la deuxième ligne du tableau  $T$  est de longueur 2 et la quatrième ligne du tableau  $T$  est de longueur 1.

Comme  $\text{sign}(\alpha \circ \sigma) = \text{sign}(\alpha) \times \text{sign}(\sigma)$  et comme  $\alpha \circ \sigma = \tau$ , alors

$$\text{sign}(\alpha) \times \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\tau),$$

ce qui implique que

$$\text{sign}(\alpha) \times \text{sign}(T) \times \text{sign}(Q) \times (-1)^e = \text{sign}(S) \times \text{sign}(Q) \times (-1)^e.$$

Ainsi

$$\text{sign}(\alpha) \times \text{sign}(T) = \text{sign}(S).$$

Ce qui équivaut

$$\text{sign}(\alpha) = (-1)^{\text{inv}(S) - \text{inv}(T)}.$$

Comme par hypothèse la différence  $\text{inv}(S) - \text{inv}(T)$  est impaire car

$$(-1)^{\text{inv}(S) - \text{inv}(T)} = \frac{\text{sign}(\text{read}(S))}{\text{sign}(\text{read}(T))} = \frac{\text{sign}(s_{n-1} \circ \text{read}(T))}{\text{sign}(\text{read}(T))} = \text{sign}(s_{n-1}) = (-1)$$

où  $s_{n-1}$  est la transposition élémentaire  $s_{n-1} = (n-1 \ n)$ , alors  $\text{sign}(\alpha) = -1$ . Donc  $\alpha$  est une permutation impaire. Par conséquent,  $\alpha$  est un cycle de longueur paire.

□

On peut poser une conjecture plus générale que cette nouvelle conjecture comme suit :

**Conjecture 4** Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards ne diffèrent que par la position de deux entiers consécutifs. Soit  $Q$  un tableau de Young standard de même forme. Alors les deux permutation  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$  où  $\pi$  est la correspondance de Schensted, ne diffèrent comme mots que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire, c'est-à-dire  $\alpha \circ \sigma = \tau$ .

En d'autres mots, deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ayant le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de deux entiers consécutifs vérifient  $\alpha \circ \sigma = \tau$  avec  $\alpha$  un cycle de longueur paire.

**Exemple 2** Soient  $T$ ,  $S$  et  $Q$  les tableaux de Young standards suivants :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 19 & & & \\ \hline 11 & 14 & 16 & 20 & \\ \hline 5 & 9 & 12 & 15 & \\ \hline 2 & 7 & 8 & 13 & 18 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ \hline \end{array}, S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 19 & & & \\ \hline 11 & 14 & 15 & 20 & \\ \hline 5 & 9 & 12 & 16 & \\ \hline 2 & 7 & 8 & 13 & 18 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 19 & 20 & & & \\ \hline 15 & 16 & 17 & 18 & \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Les tableaux  $T$  et  $S$  ne diffèrent que par la position des deux entiers consécutifs 15 et 16. Le tableau  $Q$  est de même forme que les tableaux  $T$  et  $S$ . Posons  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et

$\tau = \pi^{-1}(S, Q)$ . Alors

$$\sigma = 5 \ 11 \ 17 \ 19 \ 20 \ 2 \ 9 \ 14 \ 16 \ 18 \ 3 \ 7 \ 12 \ 15 \ 1 \ 4 \ 8 \ 13 \ 6 \ 10$$

et

$$\tau = 11 \ 14 \ 17 \ 19 \ 20 \ 2 \ 5 \ 15 \ 16 \ 18 \ 3 \ 9 \ 12 \ 13 \ 17 \ 8 \ 10 \ 4 \ 6.$$

On a :  $\alpha \circ \sigma = \tau$  tel que  $\alpha$  est le cycle de longueur 10 suivant :

$$\alpha = (4 \ 7 \ 9 \ 5 \ 11 \ 14 \ 15 \ 13 \ 10 \ 6).$$

Dans cet exemple, on peut remarquer que le cycle  $\alpha$  n'est pas un cycle en équerre. On a obtenu les deux tableaux  $T$  et  $S$  donnés dans cet exemple et ceux donnés dans l'exemple précédent en s'inspirant des tableaux  $T$  et  $S$  utilisés dans ((Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008), page 11) pour montrer que le cycle  $\alpha$  donné dans la conjecture de Schützenberger n'est pas nécessairement un cycle en équerre. Par conséquent, cet exemple montre que le cycle  $\alpha$  donné dans cette conjecture n'est pas nécessairement un cycle en équerre.

Remarquons que cette conjecture peut être donnée de la manière suivante : deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ayant le même  $P$ -symbole et leurs  $Q$ -symboles ne diffèrent que par la position de deux entiers consécutifs vérifient  $\sigma \circ \beta = \tau$  avec  $\beta$  un cycle de longueur paire. En effet, les deux permutations  $\sigma^{-1}$  et  $\tau^{-1}$  ont le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de deux entiers consécutifs et donc par la conjecture précédente  $\alpha \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1}$  avec  $\alpha$  un cycle de longueur paire. Ainsi  $\tau = (\alpha \circ \sigma^{-1})^{-1} = \sigma \circ \alpha^{-1}$  et il suffit de poser  $\beta = \alpha^{-1}$ .

**Proposition 30** *Les conjectures 3 et 4 sont équivalentes.*

### Preuve

Il est clair que si la conjecture 4 est vraie alors la conjecture 3 est aussi vraie. Montrons maintenant que si la conjecture 3 est vraie, alors la conjecture 4 est aussi vraie. En effet, soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments ne différant que

par la position des deux entiers consécutifs  $m - 1$  et  $m$  tel que  $3 \leq m \leq n$ . Comme  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$ , alors  $\sigma^{-1} = \pi^{-1}(Q, T)$  et  $\tau^{-1} = \pi^{-1}(Q, S)$ . Comme  $T|[m+1, n] = S|[m+1, n]$ , alors par l'algorithme de suppression de Schensted, on obtient que  $\sigma^{-1}(j) = \tau^{-1}(j)$  pour tout  $j \in \{m+1, \dots, n\}$  car les  $n - m$  premières suppressions dans  $Q$  se font de la même manière dans les deux cas. Soit  $Q'$  le tableau obtenu de  $Q$  après les  $n - m$  suppressions précédentes. Posons  $\sigma' = \pi^{-1}(Q', T|[m])$  et  $\tau' = \pi^{-1}(Q', S|[m])$ . Comme  $T|[m]$  et  $S|[m]$  sont deux tableaux de Young standards à  $m$  éléments ne différant que par la position de leurs deux plus grands entiers  $m - 1$  et  $m$ , alors les deux permutations  $\sigma'$  et  $\tau'$  vérifient  $\sigma' \circ \beta' = \tau'$  avec  $\beta'$  un cycle de longueur paire dont les éléments appartiennent à l'ensemble  $[m]$ . Mais  $\sigma' = \sigma^{-1}(1) \cdots \sigma^{-1}(m)$  et  $\tau' = \tau^{-1}(1) \cdots \tau^{-1}(m)$ . Ainsi les deux permutations  $\sigma^{-1}$  et  $\tau^{-1}$  vérifient  $\sigma^{-1} \circ \beta = \tau^{-1}$  avec  $\beta$  un cycle de longueur pair tel que  $\beta(j) = \beta'(j)$  pour tout  $j \in [m]$  et  $\beta(j) = j$  pour tout  $j \in \{m+1, \dots, n\}$ . Ce qui implique que  $\tau = (\sigma^{-1} \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \sigma$ , c'est-à-dire les deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ne diffèrent comme mots que par la permutation  $\beta^{-1}$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire. Ce qui montre que la conjecture 4 découle directement de la conjecture 3.

□

### 5.3 Nouvelle conjecture implique la conjecture de Shützenberger

**Proposition 31** *Si la conjecture 3 est vraie, alors la conjecture de Schützenberger est aussi vraie.*

#### Preuve

Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments ne différant que par la position des entiers consécutifs  $m - 1$  et  $m$  pour un certain  $3 \leq m \leq n$ .

Comme  $T$  et  $S$  sont deux tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$  qui coïncident dans les positions des  $n - m$  plus grands éléments  $m + 1, \dots, n$ , alors par le

corollaire 7 du chapitre 4,  $ev(P)$  et  $ev(P')$  coïncident dans les positions des  $n - m$  plus petits éléments  $1, \dots, n - m$ . Ainsi

$$ev(T) \upharpoonright [n - m] = ev(S) \upharpoonright [n - m].$$

Par l'identité de Shützenberger démontrée dans ((Schützenberger, 1976), section 3.6), pour tout  $1 \leq k \leq n$  :

$$ev(T) \upharpoonright [k] = ev(J(st(T) \upharpoonright [n - k + 1, n])).$$

Comme cette identité est vérifiée pour tout tableau de Young standard  $T$ , alors en remplaçant  $T$  par  $ev(T)$ , on obtient

$$T \upharpoonright [k] = ev(J(st(ev(T) \upharpoonright [n - k + 1, n]))).$$

Mais

$$\begin{aligned} ev(J(st(ev(T) \upharpoonright [n - k + 1, n]))) &= ev(P(\text{read}(st(ev(T) \upharpoonright [n - k + 1, n]))) \\ &= P\left(\left(\text{read}(st(ev(T) \upharpoonright [n - k + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$P\left(\left(\text{read}(st(ev(T) \upharpoonright [n - k + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right) = T \upharpoonright [k]$$

et en particulier pour  $k = m$

$$P\left(\left(\text{read}(st(ev(T) \upharpoonright [n - m + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right) = T \upharpoonright [m].$$

De même

$$P\left(\left(\text{read}(st(ev(S) \upharpoonright [n - m + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right) = S \upharpoonright [m].$$

Ce qui implique que les  $P$ -symboles des deux permutations

$$\left(\left(\text{read}(st(ev(T) \upharpoonright [n - m + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right) \text{ et } \left(\left(\text{read}(st(ev(S) \upharpoonright [n - m + 1, n]))^*\right)^{\text{compl}}\right)$$

de l'ensemble  $[m]$  ne diffèrent que par la position de leurs plus grands entiers  $m - 1$  et  $m$ . On va montrer que ces deux permutations ont le même  $Q$ -symbole.

Remarquons que les deux permutations

$$((\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n]))^*)^{\text{compl}} \text{ et } ((\text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n]))^*)^{\text{compl}}$$

ont le même  $Q$ -symbole si et seulement si

$$ev(Q(\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n]))) = ev(Q(\text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n]))))$$

et donc si et seulement si

$$Q(\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n]))) = Q(\text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n]))).$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$st(ev(T) | [n - m + 1, n]) \stackrel{K^*}{\cong} st(ev(S) | [n - m + 1, n]).$$

Mais, par le théorème 8 du chapitre 1, il est équivalent de montrer que

$$st(ev(T) | [n - m + 1, n]) \stackrel{*}{\cong} st(ev(S) | [n - m + 1, n]).$$

Par le théorème 9 du chapitre 1, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$V : J^X(st(ev(T) | [n - m + 1, n])) = V : J^X(st(ev(S) | [n - m + 1, n]))$$

pour un certain tableau de Young standard  $X$  de sorte que la forme commune de chacun des tableaux standards gauches  $st(ev(T) | [n - m + 1, n])$  et  $st(ev(S) | [n - m + 1, n])$  prolonge la forme du tableau  $X$ . Il suffit de poser  $X = ev(ev(T) | [n - m])$ . En effet, comme l'opération d'évacuation est une involution, alors  $ev(ev(T)) = T$ , ce qui implique que :

$$V : J^{ev(ev(T) | [n - m])}(st(ev(T) | [n - m + 1, n])) = st(T | [m + 1, n])$$

et que

$$V : J^{ev(ev(T) | [n - m])}(st(ev(S) | [n - m + 1, n])) = st(S | [m + 1, n]).$$

Mais  $ev(T) | [n - m] = ev(S) | [n - m]$  et  $T | [m + 1, n] = S | [m + 1, n]$ , ainsi

$$V : J^X(st(ev(T) | [n - m + 1, n])) = V : J^X(st(ev(S) | [n - m + 1, n])).$$



Comme les deux permutations

$$((\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n])))^*)^{\text{compl}} \text{ et } ((\text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n])))^*)^{\text{compl}}$$

ont le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers, alors par la conjecture 3 qu'on a supposé vraie elles ne diffèrent comme mots que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire, c'est-à-dire

$$\alpha \circ \left( ((\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n])))^*)^{\text{compl}} \right) = ((\text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n])))^*)^{\text{compl}}.$$

Ce qui implique que

$$\beta \circ (\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n]))) = \text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n]))$$

où  $\beta = \omega_{0,m} \circ \alpha \circ \omega_{0,m}$  (on utilise le fait que pour  $\sigma \in \mathcal{S}_m$  :  $(\sigma^*)^{\text{compl}} = \omega_{0,m} \circ \sigma \circ \omega_{0,m}$ ).

Remarquons que la permutation  $\beta$  est obtenue de  $\alpha$  par conjugaison, ce qui implique que  $\beta$  est un cycle de même longueur que  $\alpha$ .

Comme

$$ev(T) | [n - m] = ev(S) | [n - m]$$

et

$$\beta \circ (\text{read}(st(ev(T) | [n - m + 1, n]))) = \text{read}(st(ev(S) | [n - m + 1, n])),$$

alors  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par une permutation  $\beta''$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire (le cycle  $\beta''$  est obtenu de  $\beta$  en ajoutant  $n - m$  à chacun de ses éléments). Par conséquent, la conjecture de Schützenberger est vraie.

□

Voici un exemple illustratif. Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à 14 éléments ne diffèrent que par la position des deux entiers consécutifs 8 et 9 tels que :

$$\omega(T) = 1211231\mathbf{3}221434 \text{ et } \omega(S) = 1211231\mathbf{2}321434.$$

Par l'algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi élaboré au chapitre 3, on a

$$\omega(ev(T)) = (\omega(T))^{ev} = 12132114134223 \text{ et } \omega(ev(S)) = (\omega(S))^{ev} = 12132134124312.$$

Dans ce cas,  $n = 14$  et  $m = 9$ , ce qui implique que  $n - m = 5$ . Remarquons que

$$\omega(ev(T) | [5]) = \omega(ev(S) | [5]) = 12132.$$

Ce qui implique que  $ev(T) | [5] = ev(S) | [5]$ .

Remarquons aussi que

$$\omega_g(st(ev(T) | [6, 14])) = 114134223 \text{ et } \omega_g(st(ev(S) | [6, 14])) = 134124312.$$

En utilisant la proposition 4 du chapitre 2, on peut déduire que :

$$\begin{aligned} \text{read}(st(ev(T) | [6, 14])) &= \left( (st_d(114134223))^{-1} \right)^* \\ &= 365978124 \end{aligned}$$

et que :

$$\begin{aligned} \text{read}(st(ev(S) | [6, 14])) &= \left( (st_d(134124312))^{-1} \right)^* \\ &= 362759148. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\text{read}(ev(T) | [6, 14]) = 8 \ 11 \ 10 \ 14 \ 12 \ 13 \ 6 \ 7 \ 9 \text{ et } \text{read}(ev(S) | [6, 14]) = 8 \ 11 \ 7 \ 12 \ 10 \ 14 \ 6 \ 9 \ 13$$

Remarquons que

$$\text{read}(ev(T) | [6, 14]) = \beta'' \circ \text{read}(ev(S) | [6, 14])$$

avec

$$\beta'' = (7 \ 10 \ 12 \ 14 \ 13 \ 9)$$

un cycle de longueur 6. Comme

$$ev(T) | [5] = ev(S) | [5]$$

et

$$\text{read}(ev(T) \mid [6, 14]) = \beta'' \circ \text{read}(ev(S) \mid [6, 14]),$$

alors  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par une permutation  $\beta''$  des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire.

En appliquant l'algorithme de redressement au tableau gauche standard  $st(ev(T) \mid [6, 14])$ , on obtient un tableau de Young standard  $T_1$  tel que

$$\begin{aligned} \omega(T_1) &= \omega(J(st(ev(T) \mid [6, 14]))) \\ &= \omega(P(\text{read}(st((ev(T) \mid [6, 14]))))) \\ &= \omega(P(3\ 6\ 5\ 9\ 7\ 8\ 1\ 2\ 4)) \\ &= 112123213. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \omega(P(\omega_{0,9} \circ \text{read}(st((ev(T) \mid [6, 14]))) \circ \omega_{0,9})) &= (\omega(P(\text{read}(st((ev(T) \mid [6, 14])))))^{ev} \\ &= ((\omega(T \mid [9]))^{ev})^{ev} \\ &= \text{préf}_9(\omega(T)) \\ &= 121123132. \end{aligned}$$

On peut obtenir  $\omega(T_1)$  en effectuant les cinq premières étapes de l'algorithme d'évacuation du mot de Yamanouchi  $\omega(ev(T))$  qui est égal à  $\omega(ev(T) \mid [5])\omega_g(st(ev(T) \mid [6, 14]))$  comme ci-dessous. Ce qui montre que

$$\omega_g[V : J^{ev(ev(T) \mid [5])}(st(ev(T) \mid [6, 14]))] = 21434 = \omega_g(st(T \mid [10, 14])).$$

De même, en appliquant l'algorithme de redressement au tableau standard gauche  $st(ev(S) \mid [6, 14])$ , on obtient un tableau de Young standard  $S_1$  tel que

$$\begin{aligned} \omega(S_1) &= \omega(J(st(ev(S) \mid [6, 14]))) \\ &= \omega(P(\text{read}(st((ev(S) \mid [6, 14]))))) \\ &= \omega(P(3\ 6\ 2\ 7\ 5\ 9\ 1\ 4\ 8)) \\ &= 123123112. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \omega(P(\omega_{0,9} \circ \text{read}(st((ev(S) \mid [6, 14]))) \circ \omega_{0,9})) &= (\omega(P(\text{read}(st((ev(S) \mid [6, 14])))))^{ev}) \\
 &= ((\omega(S \mid [9]))^{ev})^{ev} \\
 &= \text{préf}_9(\omega(S)) \\
 &= 121123123.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & (3)_1 & 2_2 & 1_3 & 1_4 & (4)_1 & 1_5 & 3_2 & (4)_2 & 2_3 & 2_4 & 3_3 \\
 \cdot & (1)_1 & (1)_2 & 2_1 & (2)_2 & 1_3 & 1_4 & 3_1 & 1_5 & (3)_2 & 4_1 & 2_3 & 2_4 & (3)_3 \\
 \cdot & \cdot & (1)_1 & (2)_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & (3)_1 & 1_5 & 2_2 & (4)_1 & 2_3 & 2_4 & 3_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & (1)_1 & (1)_2 & (1)_3 & (1)_4 & 2_1 & (1)_5 & 2_2 & 3_1 & 2_3 & 2_4 & 3_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (1)_1 & (1)_2 & (1)_3 & 2_1 & (1)_4 & 2_2 & 3_1 & 2_3 & (2)_4 & 3_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3
 \end{array}$$

Remarquons que les  $P$ -symboles des deux permutations

$$\omega_{0,9} \circ \text{read}(st((ev(S) \mid [6, 14]))) \circ \omega_{0,9} \text{ et } \omega_{0,9} \circ \text{read}(st((ev(S) \mid [6, 14]))) \circ \omega_{0,9}$$

de l'ensemble  $[9]$  ne diffèrent que par la position de leurs plus grands entiers 8 et 9.

On peut obtenir  $\omega(S_1)$  en effectuant les cinq premières étapes de l'algorithme d'évacuation du mot de Yamanouchi  $\omega(ev(S))$  qui est égal à  $\omega(ev(S) \mid [5])\omega_g(st(ev(S) \mid [6, 14]))$

comme ci-dessous

$(1)_1$	$(2)_1$	$1_2$	$(\underline{3})_1$	$2_2$	$1_3$	$(3)_2$	$4_1$	$1_4$	$2_3$	$(\underline{4})_2$	$3_3$	$1_5$	$2_4$
$\cdot$	$(1)_1$	$(1)_2$	$2_1$	$(\underline{2})_2$	$1_3$	$3_1$	$4_1$	$1_4$	$(2)_3$	$3_2$	$(\underline{3})_3$	$1_5$	$2_4$
$\cdot$	$\cdot$	$(1)_1$	$(\underline{2})_1$	$1_2$	$1_3$	$(3)_1$	$(\underline{4})_1$	$1_4$	$2_2$	$3_2$	$2_3$	$1_5$	$2_4$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$(1)_1$	$(\underline{1})_2$	$(1)_3$	$2_1$	$3_1$	$(1)_4$	$2_2$	$3_2$	$2_3$	$(\underline{1})_5$	$2_4$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$(\underline{1})_1$	$(1)_2$	$2_1$	$3_1$	$(1)_3$	$2_2$	$3_2$	$(2)_3$	$1_4$	$(\underline{2})_4$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$1$	$2$	$3$	$1$	$2$	$3$	$1$	$1$	$2$

Ce qui montre que

$$\omega_g \left[ V : J^{ev(ev(S)|[5])} (ev(S) | [6, 14]) \right] = 21434 = \omega_g (st(S | [10, 14])) .$$

On peut remarquer que :

$$\omega_g \left[ V : J^{ev(ev(T)|[5])} (ev(T) | [6, 14]) \right] = \omega_g \left[ V : J^{ev(ev(T)|[5])} (ev(S) | [6, 14]) \right] = 21434$$

et que

$$\omega (ev(ev(T) | [5])) = 11223 = \omega (ev(ev(S) | [5])) .$$

Ce qui implique que

$$ev(T) | [6, 14] \stackrel{*}{\cong} ev(S) | [6, 14] .$$

Ainsi les deux permutations

$$\omega_{0,9} \circ \text{read} (st((ev(T) | [6, 14]))) \circ \omega_{0,9} \text{ et } \omega_{0,9} \circ \text{read} (st((ev(S) | [6, 14]))) \circ \omega_{0,9}$$

ont le même  $Q$ -symbole.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \omega_{0,9} \circ \text{read} (st ((ev(T) | [6, 14]))) \circ \omega_{0,9} &= \omega_{0,9} \circ (3 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8 \ 1 \ 2 \ 4) \circ \omega_{0,9} \\
 &= ((3 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8 \ 1 \ 2 \ 4)^*)^{\text{compl}} \\
 &= 6 \ 8 \ 9 \ 2 \ 3 \ 1 \ 5 \ 4 \ 7
 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
 \omega_{0,9} \circ \text{read} (st ((ev(S) | [6, 14]))) \circ \omega_{0,9} &= \omega_{0,9} \circ (3 \ 6 \ 2 \ 7 \ 5 \ 9 \ 1 \ 4 \ 8) \circ \omega_{0,9} \\
 &= ((3 \ 6 \ 2 \ 7 \ 5 \ 9 \ 1 \ 4 \ 8)^*)^{\text{compl}} \\
 &= 2 \ 6 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 8 \ 4 \ 7.
 \end{aligned}$$

Ces deux permutations de l'ensemble  $[9]$  ont le même  $Q$ -symbole et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers. On peut vérifier que

$$\pi(6 \ 8 \ 9 \ 2 \ 3 \ 1 \ 5 \ 4 \ 7) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 8 & & \\ \hline 2 & 5 & 9 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 8 & & \\ \hline 4 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 9 \\ \hline \end{array} \right)$$

et

$$\pi(2 \ 6 \ 9 \ 1 \ 5 \ 3 \ 8 \ 4 \ 7) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 9 & & \\ \hline 2 & 5 & 8 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 8 & & \\ \hline 4 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 9 \\ \hline \end{array} \right).$$

Dans toute la suite de cette thèse, nous allons utiliser la notation suivante : si  $T$  est un tableau de Young standard à  $n$  éléments et  $\sigma$  une permutation de  $[n]$ , alors  $\sigma T$  dénote le tableau obtenu de  $T$  en remplaçant chaque élément  $j$  de  $[n]$  par  $\sigma(j)$ . Si  $S = \sigma T$ , on dit que les tableaux  $S$  et  $T$  diffèrent par la permutation  $\sigma$ . Si  $T$  et  $S$  sont deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments ne diffèrent que par la position des deux entiers consécutifs  $i$  et  $i + 1$ , alors on écrit  $S = s_i T$  où  $s_i$  est la transposition  $(i \ i + 1)$  et si  $Q$  est un tableau de Young standard de même forme que les tableaux  $S$  et  $T$ , alors on écrit

$$(T, Q) \xrightarrow{(s_i, Id)} (S, Q)$$

où  $Id$  dénote la fonction identité. On dénote par  $[(\cdot)^*]^{\text{compl}}$  la bijection de  $\mathcal{S}_n$  vers  $\mathcal{S}_n$  qui associe à chaque permutation  $\sigma$  la permutation  $(\sigma^*)^{\text{compl}}$ . Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux permutations de  $[n]$  telles que  $\alpha \circ \sigma = \tau$  où  $\alpha$  est une permutation de  $[n]$ , alors on écrit  $\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau$ . Le Shéma donné ci-dessous montre que le lien entre la conjecture de Schützenberger et la nouvelle conjecture précédente est très étroit. En effet, l'évacué  $ev(T)$  d'un tableau de Young standard  $T$  est le  $P$ -symbole du complément de l'image miroir d'une permutation ayant ce tableau  $T$  comme  $P$ -symbole. Les tableaux de Young standards  $T$  et  $S$  à  $n$  éléments donnés ci-dessous vérifient  $S = s_{n-1}T$  et par le théorème de Foata (Foata, 1976),  $ev(S) = \alpha ev(T)$  où  $\alpha$  est un cycle en équerre de longueur paire. Le tableau  $Q$  est de même forme que les tableaux  $T$  et  $S$ . Posons  $\pi^{-1}(T, Q) = \sigma$  et  $\pi^{-1}(S, Q) = \tau$ , alors par la nouvelle conjecture précédente  $\beta \circ \sigma = \tau$  où  $\beta$  est un cycle de longueur pair. Nous conjecturons que cette nouvelle conjecture est équivalente à la conjecture de Schützenberger. Montrer que si la conjecture de Schützenberger est vraie alors cette nouvelle conjecture est vraie reste un problème ouvert. Nous poserons aussi le problème de trouver le lien entre les deux cycles  $\alpha$  et  $\beta$  donnés dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (T, Q) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \sigma & \xrightarrow{[(\cdot)^*]^{\text{compl}}} & (\sigma^*)^{\text{compl}} & \xrightarrow{\pi} & (ev(T), ev(Q)) \\
 \downarrow (s_{n-1}, Id) & & \downarrow \beta & & \downarrow (\beta^*)^{\text{compl}} & & \downarrow (\alpha, Id) \\
 (S, Q) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \tau & \xrightarrow{[(\cdot)^*]^{\text{compl}}} & (\tau^*)^{\text{compl}} & \xrightarrow{\pi} & (ev(S), ev(Q))
 \end{array}$$

Pour les tableaux ayant un seul coin intérieur, on pose la conjecture suivante :

**Conjecture 5** Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments tels que chacun a un seul coin intérieur et  $S = s_i(T)$  pour un certain  $i$ . Soit  $Q$  un tableau de Young standard de même forme. Alors les deux permutation  $\sigma = \pi^{-1}(T, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(S, Q)$  où  $\pi$  est la correspondance de Schensted, ne diffèrent comme mots que par une permutation des positions des entiers  $i$  et  $i + 1$ , c'est-à-dire  $s_i \circ \sigma = \tau$ .

En d'autres mots, deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  ayant le même  $Q$ -symbole, un tableau de Young standard ayant un seul coin intérieur, et leurs  $P$ -symboles ne diffèrent que par la position de deux entiers consécutifs  $i$  et  $i + 1$  vérifient  $s_i \circ \sigma = \tau$ .

En utilisant le résultat de M. Desgroseilliers et *al*, dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008), qui ont démontré que si  $T$  et  $S$  sont deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments tels que chacun a un seul coin intérieur et  $S = s_i(T)$  pour un certain  $i$  et si  $Q$  est un tableau de Young standard de même forme, alors les deux tableaux  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par la position des deux entiers  $n-i$  et  $n-i+1$ , c'est-à-dire  $ev(S) = s_{n-i}(ev(T))$ , on obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (T, Q) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \sigma & \xrightarrow{[(\cdot)^*]^{\text{compl}}} & (\sigma^*)^{\text{compl}} & \xrightarrow{\pi} & (ev(T), ev(Q)) \\
 \downarrow (s_i, Id) & & \downarrow s_i & & \downarrow s_{n-i} & & \downarrow (s_{n-i}, Id) \\
 (S, Q) & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \tau & \xrightarrow{[(\cdot)^*]^{\text{compl}}} & (\tau^*)^{\text{compl}} & \xrightarrow{\pi} & (ev(S), ev(Q))
 \end{array}$$

#### 5.4 Solution de la nouvelle conjecture pour les tableaux de Young standards ayant seulement deux lignes

Dans cette section, nous montrons la nouvelle conjecture précédente (la conjecture 3), en utilisant l'algorithme que nous avons élaboré au chapitre 3 pour la correspondance de Schensted entre les permutations et les paires de mots de Yamanouchi de même forme, dans le cas particulier des tableaux de Young standards ayant seulement deux lignes.

**Théorème 14** *Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments ne différent que par la position de leurs deux plus grands entiers  $n$  et  $n-1$ . Soit  $Q$  un tableau de Young standard de même forme  $\lambda \vdash n$  tels que  $\lambda \in P(n, 2)$  où  $P(n, 2)$  désigne l'ensemble de tous les partages de  $n$  dont le nombre de parts est 2. Les permutations  $\sigma = \pi^{-1}(P_1, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(P_2, Q)$ , où  $\pi$  dénote la correspondance de Schensted, ne diffèrent comme mots que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle en équerre de longueur paire, c'est-à-dire  $\alpha \circ \sigma = \tau$ .*

Notons que  $n$  et  $n-1$  ne peuvent pas être dans  $P_1$  ni dans  $P_2$  dans la même ligne ni dans la même colonne car sinon ils seront dans des cases adjacentes et on ne peut pas les permuter.



Pour montrer ce théorème, nous allons utiliser l'algorithme que nous avons élaboré au chapitre 3 pour la correspondance de Schensted entre les permutations et les paires de mots de Yamanouchi de même forme comme dans l'exemple suivant : soient  $P_1$ ,  $P_2$  et  $Q$  les trois tableaux de Young standards suivants à 5 éléments de même forme  $(3, 2) \vdash 5$

$$P_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}, P_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

On a  $\omega(P_1) = 11212$ ,  $\omega(P_2) = 11221$  et  $\omega(Q) = 12112$ . Par l'algorithme que nous avons élaboré au chapitre 3 pour la correspondance de Schensted entre les permutations et les paires de mots de Yamanouchi de même forme, on obtient respectivement les deux permutations  $\sigma = \pi^{-1}(P_1, Q)$  et  $\tau = \pi^{-1}(P_2, Q)$  en appliquant successivement les fonctions de suppression suivantes :  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_1$  à chacun des mots de Yamanouchi  $\omega(P_1)$  et  $\omega(P_2)$  comme suit :

11212		11221	
112 · 1	4	1 · 211	2
112 · ·	5	1 · 21 ·	5
1 · 2 · ·	2	1 · 2 · ·	4
· · 1 · ·	1	· · 1 · ·	1
· · · · ·	3	· · · · ·	3

Ainsi  $\sigma = 31254$  et  $\tau = 31452$ . Remarquons que  $\sigma = \alpha \circ \tau$  avec  $\alpha = (2\ 4)$ .

### Preuve

Supposons que  $\omega(P_1) = u12$  et  $\omega(P_2) = u21$  où  $u \in \mathcal{Y}([2])$  et  $\mathcal{Y}([2])$  dénote l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi dont les lettres appartiennent à  $[2]$ . Comme  $\omega(Q) = vab$  où  $v \in \mathcal{Y}([2])$  et  $a, b \in [2]$ , alors, on peut distinguer les sept cas suivants :

1)  $ab = 11$ .

2)  $ab = 21$ .

3)  $ab = 12$  et  $v = v'1$ .

4)  $ab = 12$  et  $v = v'2$  et  $u = u'1$ .

5)  $ab = 12$  et  $v = v'2$  et  $u = u'2$ .

6)  $ab = 22$  et  $u = u'1$ .

7)  $ab = 22$  et  $u = u'2$ .

On va montrer que :

Pour les cas 1) et 2),  $s_{n-1} \circ \sigma = \tau$ .

Pour le cas 3),  $(t \ n - 1) \circ \sigma = \tau$  où  $t < n - 1$ .

Pour les cas 4) et 6),  $s_{n-2} \circ \sigma = \tau$ .

Pour les cas 5) et 7),  $\alpha \circ \sigma = \tau$  où  $\alpha$  est un cycle en équerre de longueur paire  $\geq 4$ .

Commençons la preuve cas par cas. Dans toute la preuve de ce théorème, on note la lettre 0 par  $*$  et on note par  $\cdots$  un mot de longueur arbitraire dont les lettres appartiennent à  $[2]$  et on note par  $\underbrace{\cdots}$  un mot de longueur arbitraire dont toutes les lettres sont égales à 2 et par  $\underbrace{***}$  un mot de longueur arbitraire dont toutes les lettres sont égales à 0.

**Cas 1)** :  $\omega(Q) = v11$

En appliquant les deux premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_1$ , on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots 1 \underbrace{\cdots} 1 \underbrace{\cdots} 12 & & \cdots 1 \underbrace{\cdots} 1 \underbrace{\cdots} 21 \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots} 1 \underbrace{\cdots} *2 & n-1 & \cdots 1 \underbrace{\cdots} 1 \underbrace{\cdots} 2* & n \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots} * \underbrace{\cdots} *2 & t & \cdots 1 \underbrace{\cdots} * \underbrace{\cdots} 2* & t
 \end{array}$$

ce qui implique que  $\sigma(n) = n - 1$  et  $\sigma(n - 1) = t$  et que  $\tau(n) = n$  et  $\tau(n - 1) = t$  où  $t < n - 1$ .

Remarquons que chaque fois qu'on applique une fonction de suppression  $\mathcal{D}_1$ , on obtient le même résultat dans les deux cas. Lorsqu'on applique une fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$ ,

on obtient aussi le même résultat

$$\cdots * \underbrace{\cdots *}_{s} \underbrace{\cdots *}_{s} 1 \quad \cdots * \underbrace{\cdots *}_{s} \underbrace{\cdots *}_{s} 1 \quad s$$

Remarquons maintenant que chaque fois qu'on applique une fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$  on obtient le même résultat dans les deux cas et lorsqu'on applique une fonction de suppression  $\mathcal{D}_1$ , on obtient

$$\cdots * \underbrace{\cdots *}_{n} \underbrace{\cdots *}_{n-1} ** \quad \cdots * \underbrace{\cdots *}_{n-1} \underbrace{\cdots *}_{n} ** \quad n-1$$

Ce qui implique que  $\sigma(i) = n$  et  $\tau(i) = n-1$  pour un certain  $i < n-1$ .

L'application des autres fonctions de suppression donne toujours le même résultat. Par conséquent,

$$s_{n-1} \circ \sigma = \tau.$$

**Cas 2) :**  $\omega(Q) = v21$

En appliquant successivement les deux premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , on obtient :

$$\begin{array}{ll} \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{n-1} \underbrace{\cdots 12}_{t} & \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{n-1} \underbrace{\cdots 21}_{t} \\ \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{n-1} \underbrace{\cdots *2}_{n-1} & \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{n-1} \underbrace{\cdots 2*}_{n} \\ \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{t} \underbrace{\cdots *1}_{t} & \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{t} \underbrace{\cdots 1*}_{t} \end{array}$$

L'application de chaque fonction  $\mathcal{D}_2$  donne le même résultat, alors que l'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne

$$\cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{n} \underbrace{\cdots **}_{n-1} \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{n-1} \underbrace{\cdots **}_{n} \quad n-1$$

Ce qui implique que  $s_{n-1} \circ \sigma = \tau$ .

L'application des autres fonctions de suppression donne toujours le même résultat. Par conséquent,

$$s_{n-1} \circ \sigma = \tau.$$

**Cas 3) :**  $\omega(Q) = v'112$

En appliquant successivement les trois premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_1$ , on obtient :

$$\begin{array}{ll}
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{\cdots} \underbrace{\cdots 12}_{\cdots} & \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{\cdots} \underbrace{\cdots 21}_{\cdots} \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{\cdots} \underbrace{\cdots *1}_{\cdots} & n-1 \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{\cdots} \underbrace{\cdots 11}_{\cdots} \quad t \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1}_{\cdots} \underbrace{\cdots **}_{\cdots} & n \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{\cdots} \underbrace{\cdots 1*}_{\cdots} \quad n \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{\cdots} \underbrace{\cdots **}_{\cdots} & t \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{\cdots} \underbrace{\cdots **}_{\cdots} \quad n-1
 \end{array}$$

Ce qui implique que  $(t \ n-1) \circ \sigma = \tau$  où  $t < n-1$ .

L'application des autres fonctions de suppression donne toujours le même résultat. Par conséquent,

$$(t \ n-1) \circ \sigma = \tau \text{ où } t < n-1.$$

**Cas 4) :**  $\omega(Q) = v'212$ ,  $\omega(P_1) = u'112$  et  $\omega(P_2) = u'121$

En appliquant successivement les trois premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , on obtient :

$$\begin{array}{ll}
 \cdots 112 & \cdots 121 \\
 \cdots 1 * 1 & n-1 \quad \cdots * 11 \quad n-2 \\
 \cdots 1 ** & n \quad \cdots * 1* \quad n
 \end{array}$$

L'application de chaque fonction  $\mathcal{D}_2$  donne le même résultat, alors que l'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne

$$\cdots * ** \quad n-2 \quad \cdots * ** \quad n-1$$

Ce qui implique que  $s_{n-2} \circ \sigma = \tau$ .

L'application des autres fonctions de suppression donne toujours le même résultat. Par conséquent,

$$s_{n-2} \circ \sigma = \tau.$$

**Cas 5)**  $\omega(Q) = v'212$ ,  $\omega(P_1) = u'212$  et  $\omega(P_2) = u'221$

En appliquant successivement les trois premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , on obtient :

$$\begin{array}{ll}
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1} \underbrace{\cdots 2} 12 & \cdots 1 \underbrace{\cdots 1} \underbrace{\cdots 2} 21 \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1} \underbrace{\cdots 2} * 1 & n-1 \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots 2} 11 \quad t \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots 1} \underbrace{\cdots 2} ** & n \quad \cdots 1 \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots 2} 1* \quad n \\
 \cdots 1 \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots 1} ** & t \quad \cdots * \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots 1} 1* \quad s
 \end{array}$$

L'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ )

$$\cdots 1 \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots **} \quad n-2 \qquad \cdots * \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots 1} ** \quad n-1$$

Jusqu'à maintenant, on a la chaîne suivante :

$$n-2 \longrightarrow n-1 \longrightarrow t \longrightarrow s$$

On peut distinguer les deux cas suivants :

1) Si la fonction de suppression suivante est une fonction  $\mathcal{D}_1$ , on obtient le cycle de longueur 4 suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots * \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots **} & s & \cdots * \underbrace{\cdots *} \underbrace{\cdots **} \quad n-2 \\
 n-2 \longrightarrow n-1 & & \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 s & \longleftarrow & t
 \end{array}$$

qui est un cycle en équerre car  $s < n-2 < n-1 > t$ .

2) Si la fonction de suppression suivante est une fonction  $\mathcal{D}_2$ . Dans ce cas, on peut distinguer les deux cas suivants :

2) - 1) S'il n'y a pas de lettres égales à 2 dans les deux régions ci-haut données par les deux mots dont toutes les lettres sont égales à 2, c'est-à-dire si ces deux mots sont vides, on a  $t = n-3$  et la fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$  précédente donne le même résultat dans

les deux cas

$$\dots 1 * * * *$$

$$\dots * * 1 * *$$

et l'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$  qui donnent le même résultat dans les deux cas)

$$\dots * * * * * \quad n - 4$$

$$\dots * * * * * \quad n - 2$$

et on obtient le cycle suivant de longueur 4

$$\begin{array}{ccc} n - 2 & \longrightarrow & n - 1 \\ \uparrow & & \downarrow \\ n - 4 & \longleftarrow & n - 3 \end{array}$$

qui est un cycle en équerre car  $n - 4 < n - 2 < n - 1 > n - 3$ .

2) - 2) Si au moins une des deux régions ci-haut données par les deux mots dont toutes les lettres sont égales à 2 contient un 2, c'est-à-dire si au moins un de ces deux mots n'est pas vide on obtient après l'application de la fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$  précédente l'un des deux cas suivants

Premier cas 2) - 2) - 1) :

$$\dots 1 \underbrace{\dots *}_{s} \underbrace{\dots *}_{s} \underbrace{\dots 1}_{s} * * * \quad \dots * \underbrace{\dots *}_{k} \underbrace{\dots *}_{k} \underbrace{\dots 1}_{k} 1 * * \quad k$$

L'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ )

$$\dots 1 \underbrace{\dots *}_{n-3} \underbrace{\dots *}_{n-3} \underbrace{\dots *}_{n-3} * * * \quad n - 3 \quad \dots * \underbrace{\dots *}_{n-2} \underbrace{\dots *}_{n-2} \underbrace{\dots 1}_{n-2} * * * \quad n - 2$$

et on a jusqu'à maintenant la chaîne suivante :

$$n - 3 \longrightarrow n - 2 \longrightarrow n - 1 \longrightarrow t \longrightarrow s \longrightarrow k$$

Deuxième cas 2) - 2) - 2) :

$$\dots 1 \underbrace{\dots *}_{s} \underbrace{\dots 1}_{s} * * * * \quad s \quad \dots * \underbrace{\dots *}_{k} \underbrace{\dots *}_{k} 1 * 1 * * \quad k$$

L'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ )

$$\cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{\text{}} \underbrace{\cdots *}_{\text{}} ***** \quad n-4 \quad \cdots * \underbrace{\cdots *}_{\text{}} \underbrace{\cdots *}_{\text{}} 1 ***** \quad n-2$$

et on a jusqu'à maintenant la chaîne suivante :

$$n-4 \longrightarrow n-2 \longrightarrow n-1 \longrightarrow t \longrightarrow s \longrightarrow k$$

Dans les deux cas si la fonction de suppression suivante est une fonction  $\mathcal{D}_1$ , on obtient un cycle de longueur 6

$$\begin{array}{ccccc} n-2 & & \longrightarrow & n-1 & \longrightarrow & t \\ & \uparrow & & & & \downarrow \\ n-3 \text{ ou } n-4 & \longleftarrow & k & \longleftarrow & s \end{array}$$

qui est un cycle en équerre.

On continue de cette façon et à chaque fois qu'il y a une lettre 2 et que la fonction de suppression suivante est une fonction  $\mathcal{D}_2$ , on applique cette fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$  suivie de la fonction de suppression  $\mathcal{D}_1$  (qui donne toujours le même résultat et qui ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ ) et on obtient en général

$$\cdots * \cdots * \underbrace{\cdots *}_{\text{}} \underbrace{\cdots *}_{\text{}} 1 \underbrace{***}_{\text{}} \quad \ell \quad \cdots 1 \cdots * \underbrace{\cdots *}_{\text{}} \underbrace{\cdots *}_{\text{}} \underbrace{***}_{\text{}} \quad k_1$$

Jusqu'à maintenant, on a une chaîne de longueur paire :

$$\ell \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow k_1$$

Ensuite, soit on applique une fonction  $\mathcal{D}_1$  et on obtient le cycle de longueur paire suivant :

$$\begin{array}{ccc} n-1 & \longrightarrow & \cdots \\ \vdots & & \downarrow \\ \ell & \longleftarrow & k_1 \end{array}$$

qui est un cycle en équerre, soit on applique une fonction  $\mathcal{D}_2$  suivie d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  et on continue jusqu'à ce qu'on obtient une chaîne de longueur paire qui se ferme pour donner un cycle en équerre  $\alpha$  de longueur paire. Par conséquent,

$$\alpha \circ \sigma = \tau.$$

**Cas 6)** :  $\omega(Q) = v22$ ,  $\omega(P_1) = u'112$  et  $\omega(P_2) = u'121$

En appliquant la première fonction de suppression  $\mathcal{D}_2$ , on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \dots 112 & & \dots 121 \\ \dots 1 * 1 & n-1 & \dots * 11 \quad n-2 \end{array}$$

L'application de chaque fonction  $\mathcal{D}_2$  donne le même résultat, alors que l'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne

$$\dots 1 ** \quad n \qquad \dots * 1 * \quad n$$

L'application de chaque fonction  $\mathcal{D}_2$  donne le même résultat, alors que l'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne

$$\dots *** \quad n-2 \qquad \dots *** \quad n-1$$

Ce qui implique que  $s_{n-2} \circ \sigma = \tau$ .

L'application des autres fonctions de suppression donne toujours le même résultat. Par conséquent,

$$s_{n-2} \circ \sigma = \tau.$$

**Cas 7)**  $\omega(Q) = v22$ ,  $\omega(P_1) = u'212$  et  $\omega(P_2) = u'221$

En appliquant successivement les deux premières fonctions de suppression  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_2$ , on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \dots 1 \underbrace{\dots 1} \underbrace{\dots 2} 12 & & \dots 1 \underbrace{\dots 1} \underbrace{\dots 2} 21 \\ \dots 1 \underbrace{\dots 1} \underbrace{\dots 2} * 1 & n-1 & \dots 1 \underbrace{\dots *} \underbrace{\dots 2} 11 \quad t \\ \dots 1 \underbrace{\dots *} \underbrace{\dots 1} * 1 & t & \dots * \underbrace{\dots *} \underbrace{\dots 1} 11 \quad s \end{array}$$

L'application d'une fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ )

$$\dots 1 \underbrace{\dots *} \underbrace{\dots 1} ** \quad n \qquad \dots * \underbrace{\dots *} \underbrace{\dots 1} 1 * \quad n$$



Une autre fonction  $\mathcal{D}_1$  donne (on l'applique maintenant ou après elle donne le même résultat car elle ne dépend pas des fonctions  $\mathcal{D}_2$ )

$$\cdots 1 \underbrace{\cdots *}_{n-2} \underbrace{\cdots ***}_{n-1} \cdots \underbrace{\cdots *}_{n-2} \underbrace{\cdots *}_{n-1} 1 **$$

Jusqu'à maintenant, on a :

$$n-2 \longrightarrow n-1 \longrightarrow t \longrightarrow s$$

Maintenant, on procède de la même façon que le cas 6) précédent et on obtient un cycle en équerre  $\alpha$  de longueur paire. Par conséquent,

$$\alpha \circ \sigma = \tau.$$

□

Soit l'exemple suivant :

$$P_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 21 & 22 & 23 & 24 & 26 & 27 & 28 & 30 & & & & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 20 & 25 & 29 \\ \hline \end{array}$$

et

$$P_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 21 & 22 & 23 & 24 & 26 & 27 & 28 & 29 & & & & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 20 & 25 & 30 \\ \hline \end{array}$$

et

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 25 & 26 & 27 & 28 & 30 & & & & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 24 & 29 \\ \hline \end{array}.$$

On peut remarquer que cet exemple correspond au cas 5) donné ci-dessus. On a :

$$\sigma = \pi^{-1}(P_1, Q) = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 26 \ 27 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 28 \ 14 \ 15 \ 20 \ 25 \ 30 \ 29$$

et

$$\tau = \pi^{-1}(P_2, Q) = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 26 \ 27 \ 28 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 29 \ 13 \ 14 \ 15 \ 20 \ 30 \ 25.$$

Il est clair que :

$$\alpha \circ \sigma = \tau$$

avec

$$\alpha = (6 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 25 \ 20 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8 \ 7)$$

un cycle en équerre de longueur 24.

## 5.5 Nouvelle preuve du théorème de Foata

Dans cette section, nous donnons une preuve par récurrence du théorème de Foata inspirée de la preuve de ce théorème dans ((Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008), Théorème 3.9, page 8). La preuve de Desgroseilliers et al utilise la définition de l'évacué d'un tableau de Young standard par les promotions et notre preuve utilise la définition équivalente de l'évacué par les promotions inverses.

Soit  $T$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments. Nous définissons la traînée de  $T$  qu'on note par  $tr^{\nearrow}(T)$  comme étant la suite de cases suivante :

Commençons par la case contenant 1 et choisissons la case voisine contenant la plus petite valeur (parmi les deux cases voisines situées à droite et en haut de celle-ci) comme étant la case suivante.

Par exemple, pour

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 9 & \mathbf{10} \\ \hline 3 & 5 & \mathbf{7} \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array},$$

$tr^{\nearrow}(T)$  est la suite de cases suivante :  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)$ . Remarquons que les cases de  $tr^{\nearrow}(T)$  contiennent respectivement la suite croissante des entiers suivante (du bas vers le haut) : 1, 2, 4, 7, 10.

Nous définissons la traînée inverse de  $T$  qu'on note par  $tr^{\searrow}(T)$  comme étant la suite de cases suivante :

Commençons par la case contenant  $n$  et choisissons la case voisine contenant la plus

grande valeur (parmi les deux cases voisines situées à gauche et en bas de celle-ci) comme étant la case suivante.

Par exemple, pour le tableau  $T$  donné ci-haut,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 9 & 10 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array},$$

$tr^{\searrow}(T)$  est la suite de cases suivante :  $(3, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 1)$ . Remarquons que les cases de  $tr^{\searrow}(T)$  contiennent respectivement la suite décroissante des entiers suivante (du haut vers le bas) : 10, 9, 6, 3, 1.

Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , nous définissons la promotion  $\delta_k$  comme étant l'opération qui transforme un tableau de Young standard  $T$  en un autre tableau de Young standard de même forme qu'on note par  $\delta_k(T)$  comme suit :

- (1) Supprimons 1 de sa case dans  $T$ .
- (2) Pour tout élément  $i$  plus petit ou égal à  $k$  dans  $tr^{\nearrow}(T| [k])$ , translatons la valeur  $i$  vers la case précédente (soit vers la gauche, soit vers le bas) dans  $tr^{\nearrow}(T| [k])$ .
- (3) Soustrayons 1 pour chaque élément plus petit ou égal à  $k$  du tableau obtenu en (2).
- (4) Plaçons  $k$  dans la case vide créée par la translation de la traînée  $tr^{\nearrow}(T| [k])$ .

Par exemple, pour le tableau donné ci-haut, calculons  $S = \delta_8(T)$ .

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 9 & 10 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1) \text{ et } (2)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 9 & 10 \\ \hline 3 & 5 & . \\ \hline 2 & 4 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(3) \text{ et } (4)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 9 & 10 \\ \hline 2 & 4 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} = S.$$

Remarquons que la promotion  $\delta_8$  agit seulement sur  $T| [8]$  et donc on peut écrire

$$S = \delta_8(T) = \delta_8(T| [8]) \cup st(T| [9, 10]).$$

En général, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\delta_k(T) = \delta_k(T| [k]) \cup st(T| [k+1, n]).$$

Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , nous définissons la promotion inverse  $\delta^k$  comme l'opération qui transforme un tableau de Young standard en un autre tableau de Young standard de même forme qu'on note par  $\delta^k(T)$  comme suit :

- (1) Supprimons  $k$  de sa case.
- (2) Pour tout élément  $i$  plus petit ou égal à  $k$  dans  $tr^{\searrow}(T| [k])$ , translatons la valeur  $i$  vers la case précédente (soit vers la droite, soit vers le haut) dans  $tr^{\searrow}(T| [k])$ .
- (3) Ajoutons 1 pour chaque élément plus petit ou égal à  $k$  du tableau obtenu en (2).
- (4) Plaçons 1 dans la case vide créée par la translation de la traînée  $tr^{\searrow}(T| [k])$ .

Par exemple, pour le tableau  $S$  donné ci-haut, calculons  $\delta^8(S)$ .

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 9 & 10 & \\ \hline 2 & 4 & 8 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1) \text{ et } (2)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 9 & 10 & \\ \hline 2 & 4 & 6 & \\ \hline \cdot & 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(3) \text{ et } (4)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 9 & 10 & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} = T.$$

Remarquons que la promotion  $\delta^8$  agit seulement sur  $S| [8]$  et donc on peut écrire

$$\delta^8(S) = \delta^8(S| [8]) \cup st(S| [9, 10]).$$

En général, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\delta^k(T) = \delta^k(T| [k]) \cup st(T| [k+1, n]).$$

Remarquons aussi que

$$\delta^8(S) = \delta^8(\delta_8(T)) = (\delta^8 \delta_8)(T) = T.$$

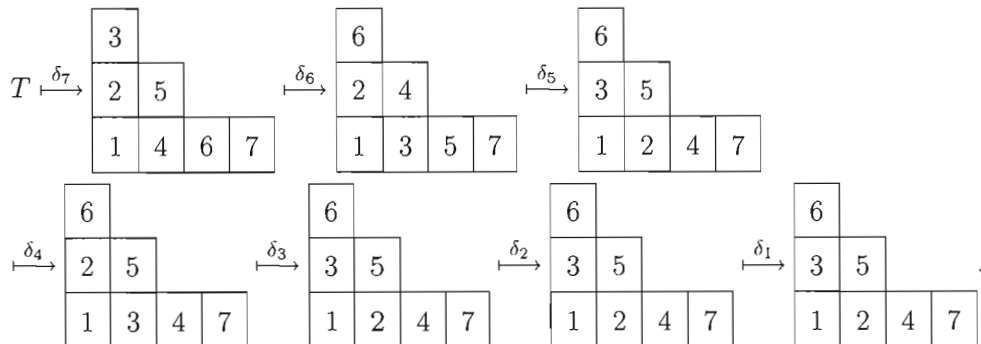
En général, pour tout  $T$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments et pour tout  $1 \leq k \leq n$ , si  $S = \delta_k(T)$ , alors  $T = \delta^k(S)$ . Autrement dit  $\delta^k \delta_k(T) = T$ .

Dans toute la suite de cette section, nous utiliserons la définition suivante de l'évacuation qui est équivalente à celle donnée à la sous-section 1.8.2 au chapitre 1.

**Définition 57** Pour  $T$ , un tableau de Young standard à  $n$  éléments, le tableau  $ev(T)$  est défini par

$$ev(T) = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n(T)$$

Par exemple, pour  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}$ , on a  $ev(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & & \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}$ . En effet,



Dans toute la suite de ce chapitre, nous allons utiliser les opérateurs suivants sur les tableaux de Young standards introduits par M. Haiman. Pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , soit  $s_i$  la transposition  $(i \ i+1)$  et définissons

$$r_i(T) = \begin{cases} s_i T & \text{si } s_i T \text{ est un tableau de Young standard,} \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple, soit  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 9 & 10 & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$ , alors  $r_9(T) = T$  et  $r_8(T) = s_8(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 8 & 10 & \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 \\ \hline \end{array}$ .

Notons que pour  $T$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments et pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\delta_k(T) = r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_2 r_1(T).$$

**Lemme 18** Soit  $T$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments. On a :

$$ev(T) = \delta^n \delta^{n-1} \cdots \delta^2 \delta^1(T).$$

### Preuve

On a :  $ev(T) = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n(T)$ . Remplaçons  $T$  par  $ev(T)$  et utilisons le fait que  $ev(ev(T)) = T$ , on obtient

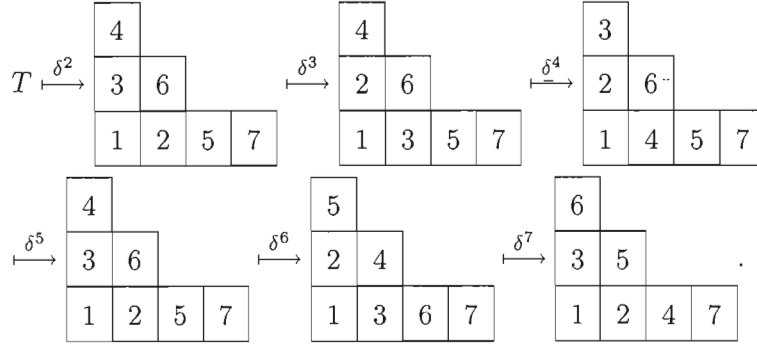
$$T = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n (ev(T)).$$

Ainsi,  $\delta^1(T) = \delta^1(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n (ev(T))) = \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n (ev(T))$ . En appliquant la promotion inverse  $\delta^2$  aux deux membres de cette égalité, on obtient  $\delta^2 \delta^1(T) = \delta^2(\delta_2 \cdots \delta_{n-1} \delta_n (ev(T))) = \delta_3 \cdots \delta_{n-1} \delta_n (ev(T))$ . On continue d'appliquer successivement les promotions inverses  $\delta^3, \delta^4, \dots, \delta^n$  aux deux membres de l'égalité obtenue et on obtient

$$\delta^n \delta^{n-1} \cdots \delta^2 \delta^1(T) = ev(T).$$

□

Par exemple, pour  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}$ , on a  $ev(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & & \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}$ . En effet,



Dans toute la suite de cette section, on va utiliser les deux lemmes suivants donnés dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008). Ces deux lemmes sont respectivement les lemmes 3.8 et 3.6 dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008).

**Lemme 19** Soit  $T$  un tableau de Young standard à  $n$  éléments tel que ses deux entrées  $i$  et  $i+1$  ne sont pas dans la même ligne ni dans la même colonne, c'est-à-dire  $r_i(T) = s_i(T)$ . Alors l'un des deux énoncés suivants est vérifié :

$$(a) \ r_{i-1}r_i r_{i-1}(T) = r_i r_{i-1}r_i(T).$$

$$(b) \ r_{i-1}r_i r_{i-1}(T) = r_i(T) \text{ et } r_i r_{i-1}r_i(T) = T.$$

**Lemme 20** *Soit  $k \geq 1$ . Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standard à  $n$  éléments de même forme  $\lambda \vdash n$  tels que  $S = \alpha T$  où  $\alpha$  est un cycle en équerre dont le support est contenu dans  $\{n - k + 1, \dots, n\}$ . Alors,  $r_{n-k}(S) = \beta(r_{n-k}(T))$  où  $\beta$  est un cycle en équerre dont le support est contenu dans  $\{n - k, \dots, n\}$ .*

On va utiliser aussi le théorème suivant donné dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008). Ce théorème est le théorème 3.2 dans (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto et Vincent, 2008).

**Théorème 15** *Soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments, avec  $n \geq 3$ , ne différant que par la position de deux entiers consécutifs; soient  $ev(T)$  et  $ev(S)$  les tableaux obtenus en appliquant à  $T$  et à  $S$  l'opération d'évacuation. Si  $ev(T)$  et  $ev(S)$  ne diffèrent que par une permutation  $\alpha$  des positions des entiers, consistant en un cycle, alors ce cycle est forcément de longueur paire.*

Maintenant, on peut donner le lemme suivant :

**Lemme 21** *Soient  $S$  et  $T$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments avec  $n \geq 3$  de même forme  $\lambda \vdash n$  tels que*

$$S = s_{n-1}(T).$$

*Alors*

$$\delta^n \delta^{n-1}(T) = \alpha(\delta^n \delta^{n-1}(S)),$$

*où  $\alpha$  est un cycle en équerre.*

**Preuve**

Par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 3$ , il y a deux cas possibles ;

1<sup>er</sup> cas :  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$  et  $S = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ . Ainsi  $S = s_2(T)$  et on a :

$$\delta^3 \delta^2(T) = S \text{ et } \delta^3 \delta^2(S) = T.$$

Par conséquent, le cycle  $\alpha$  est la transposition  $s_2$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$  et  $S = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ . Ainsi  $S = s_2(T)$  et on a :

$$\delta^3 \delta^2(T) = S \text{ et } \delta^3 \delta^2(S) = T.$$

Par conséquent, le cycle  $\alpha$  est la transposition  $s_2$ .

Supposons que cette propriété est vraie pour les tableaux de Young standards à  $n - 1$  éléments et démontrons la pour les tableaux de Young standards à  $n$  éléments. En effet, soient  $T$  et  $S$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments. Puisque  $r_i$  et  $r_j$  commutent si  $|i - j| \neq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \delta^n \delta^{n-1}(T) &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(T) \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3} \cdot r_{n-1} r_{n-2})(T) \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3})((r_{n-1} r_{n-2})(T)) \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3})(W) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W) \end{aligned}$$

où  $W = (r_{n-1} r_{n-2})(T)$ .

On a

$$\begin{aligned} \delta^n \delta^{n-1}(S) &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(S) \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})((r_{n-1})(T)) \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-2} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3})((r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1})(T)) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}((r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1})(T)). \end{aligned}$$



Comme  $(r_{n-1})(T) = (s_{n-1})(T)$ , alors par le lemme 19 précédent, on peut distinguer les deux cas suivants :

• **Premier cas :**  $(r_{n-2}r_{n-1}r_{n-2})(T) = (r_{n-1}r_{n-2}r_{n-1})(T)$  :

On a :

$$\delta^n \delta^{n-1}(T) = \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W)$$

et

$$\begin{aligned} \delta^n \delta^{n-1}(S) &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}((r_{n-1}r_{n-2}r_{n-1})(T)) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}((r_{n-2}r_{n-1}r_{n-2})(T)) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}((r_{n-2})((r_{n-1}r_{n-2})(T))) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}((r_{n-2})(W)) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W'), \end{aligned}$$

où  $W' = (r_{n-2})(W)$ .

Les tableaux  $W$  et  $W'$  sont deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments, ils ont la même forme et l'élément  $n$  occupe la même case dans les deux tableaux. Ainsi  $W| [n, n] = W'| [n, n]$ . On a aussi  $W' = (r_{n-2})(W) = (s_{n-2})(W)$ , car dans le cas contraire  $W' = W$  et donc  $\delta^n \delta^{n-1}(T) = \delta^n \delta^{n-1}(S)$ , ainsi  $\delta_{n-1} \delta_n \delta^n \delta^{n-1}(T) = \delta_{n-1} \delta_n \delta^n \delta^{n-1}(S)$ , ce qui implique  $T = S$  et ceci donne une contradiction car  $S = s_{n-1}(T)$ .

Ainsi, on peut déduire que  $W| [n-1] = s_{n-1}(W'| [n-1])$ .

On a

$$\begin{aligned} \delta^n \delta^{n-1}(T) &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W| [n-1]) \cup st(W| [n, n]) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 \delta^n \delta^{n-1}(S) &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W') \\
 &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W'|[n-1]) \cup st(W'|[n, n]) \\
 &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W'|[n-1]) \cup st(W|[n, n])
 \end{aligned}$$

Comme  $W|[n-1]$  et  $W'|[n-1]$  sont deux tableaux de Young standards à  $n-1$  éléments et comme  $W'|[n-1] = s_{n-2}(W|[n-1])$ , alors par l'hypothèse de récurrence on peut déduire,

$$\delta^{n-1} \delta^{n-2}(W'|[n-1]) = \alpha(\delta^{n-1} \delta^{n-2}(W|[n-1])),$$

où  $\alpha$  est un cycle en équerre ayant un support contenu dans  $[n-1]$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \delta^n \delta^{n-1}(S) &= \delta^{n-1} \delta^{n-2}(W'|[n-1]) \cup st(W|[n, n]) \\
 &= \alpha(\delta^{n-1} \delta^{n-2}(W|[n-1])) \cup st(W|[n, n]) \\
 &= \alpha(\delta^{n-1} \delta^{n-2}(W|[n-1]) \cup st(W|[n, n])) \\
 &= \alpha(\delta^n \delta^{n-1}(T)).
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\delta^n \delta^{n-1}(S) = \alpha(\delta^n \delta^{n-1}(T)),$$

où  $\alpha$  est un cycle en équerre qui a un support contenu dans  $[n-1]$ .

• **Deuxième cas :**  $(r_{n-2}r_{n-1}r_{n-2})(T) = r_{n-1}(T)$  et  $(r_{n-1}r_{n-2}r_{n-1})(T) = T$  :

On a :

$$\begin{aligned}
 r_{n-1} \delta^{n-1}(T) &= (r_{n-1} \cdot r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(T) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} \cdot r_{n-1} r_{n-2})(T) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} \cdot r_{n-2} r_{n-2} \cdot r_{n-1} r_{n-2})(T) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2})(T) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(r_{n-1})(T) \\
 &= \delta^n(T).
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 r_{n-1} (r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))) &= \delta^{n-1}(S) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(S) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(r_{n-1}(T)) \\
 &= \delta^n(T).
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$r_{n-1} (r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))) = r_{n-1} \delta^{n-1}(T).$$

On peut déduire que les tableaux  $r_{n-1} \delta^{n-1}(T)$  et  $r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))$  diffèrent par la transposition  $s_{n-1}$ . Car dans le cas contraire

$$\begin{aligned}
 \delta^{n-2} r_{n-2} r_{n-1}(T) &= \delta^n(T) \\
 &= r_{n-1} (r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))) \\
 &= r_{n-1} (\delta^{n-1}(S)) \\
 &= r_{n-1} ((r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-2})(S)) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3} \cdot r_{n-1} r_{n-2})(S) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3}) ((r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1})(T)) \\
 &= (r_1 r_2 \cdots r_{n-3})(T) \\
 &= \delta^{n-2}(T)
 \end{aligned}$$

ce qui implique  $r_{n-2} r_{n-1}(T) = T = r_{n-2} S$ . Ainsi  $T| [n, n] = r_{n-2}(S) | [n, n] = S | [n, n]$  ce qui donne une contradiction car  $S = s_{n-1}(T)$ .

En appliquant le lemme 20 précédent pour les tableaux  $r_{n-1} \delta^{n-1}(T)$  et  $r_{n-1} \delta^{n-1}(S)$  avec  $k = 2$  et  $\alpha = s_{n-1}$ , on obtient que les tableaux  $r_{n-2} r_{n-1} \delta^{n-1}(T)$  et  $r_{n-2} r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))$  diffèrent par un cycle en équerre qui a un support contenu dans  $\{n-2, \dots, n\}$ . En appliquant le lemme 20 précédent une deuxième fois, on obtient que les tableaux  $r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} \delta^{n-1}(T)$  et  $r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))$  diffèrent par un cycle en équerre qui a un support contenu dans  $\{n-3, \dots, n\}$ . On continue d'appliquer le lemme 20 précédent à chaque fois jusqu'à ce qu'on obtient que les tableaux  $r_1 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \delta^{n-1}(T)$  et  $r_1 \cdots r_{n-2} r_{n-1} (\delta^{n-1}(S))$

diffèrent par un cycle en équerre qui a un support contenu dans  $[n]$ . Pour terminer, il suffit de remarquer que

$$\delta^n \delta^{n-1}(T) = r_1 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \delta^{n-1}(T) \text{ et que } \delta^n \delta^{n-1}(S) = r_1 \cdots r_{n-2} r_{n-1} \delta^{n-1}(S).$$

Par conséquent, dans les deux cas les tableaux  $\delta^n \delta^{n-1}(T)$  et  $\delta^n \delta^{n-1}(S)$  diffèrent par un cycle en équerre, ce qu'il fallait montrer.

□

Nous utiliserons le lemme précédent pour démontrer le théorème de Foata donné ci-dessous et nous conjecturons qu'on peut démontrer la conjecture de Schützenberger de la même manière en utilisant le lemme suivant dont la preuve reste un problème ouvert.

**Lemme 22** *Soient  $S$  et  $T$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments avec  $n \geq 3$  de même forme  $\lambda \vdash n$  tels que*

$$S = s_i(T)$$

*pour un certain  $1 \leq i \leq n-1$ . Alors*

$$\delta^n \delta^{n-1} \cdots \delta^{i+1} \delta^i(T) = \alpha(\delta^n \delta^{n-1} \cdots \delta^{i+1} \delta^i(S)),$$

*où  $\alpha$  est un cycle.*

**Théorème 16 (Théorème de Foata)** *Soient  $S$  et  $T$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments, avec  $n \geq 3$ , qui diffèrent par la transposition  $s_{n-1}$ . Alors  $ev(S)$  et  $ev(T)$  diffèrent par un cycle en équerre de longueur paire.*

### Preuve

Soient  $S$  et  $T$  deux tableaux de Young standards à  $n$  éléments tels que  $S = s_{n-1}T$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 ev(T) &= \delta^n \delta^{n-1} \dots \delta^2 \delta^1 (T) \\
 &= \delta^n \delta^{n-1} (\delta^{n-2} \dots \delta^2 \delta^1 (T)) \\
 &= \delta^n \delta^{n-1} (\delta^{n-2} \dots \delta^2 \delta^1 (T| [n-2] \cup st(T| [n-1, n]))) \\
 &= \delta^n \delta^{n-1} (\delta^{n-2} \dots \delta^2 \delta^1 (T| [n-2]) \cup st(T| [n-1, n])) \\
 &= \delta^n \delta^{n-1} (ev(T| [n-2]) \cup st(T| [n-1, n]))
 \end{aligned}$$

De même,

$$ev(S) = \delta^n \delta^{n-1} (ev(S| [n-2]) \cup st(S| [n-1, n])).$$

Comme  $S| [n-2] = T| [n-2]$ , alors  $ev(S| [n-2]) = ev(T| [n-2])$  et comme  $st(T| [n-1, n])$  et  $st(S| [n-1, n])$  sont deux tableaux gauches standards à 2 éléments 1 et 2, ne diffèrent que par la position de ces deux entiers consécutifs 1 et 2, alors

$$ev(S| [n-2]) \cup st(S| [n-1, n]) = s_{n-1}(ev(T| [n-2]) \cup st(T| [n-1, n])).$$

En appliquant le lemme 21 précédent, on obtient que les deux tableaux

$$\delta^n \delta^{n-1} (ev(T| [n-2]) \cup st(T| [n-1, n]))$$

et

$$\delta^n \delta^{n-1} (ev(S| [n-2]) \cup st(S| [n-1, n]))$$

sont deux tableaux qui diffèrent par un cycle en équerre. Par conséquent,  $ev(T)$  et  $ev(S)$  diffèrent par un cycle en équerre de longueur paire par le théorème 15 précédent.

□



## CHAPITRE VI

### PERMUTATIONS CONNEXES ET HYPERCARTES POINTÉES

En 1949, M. Hall a établi une formule de récurrence concernant les nombres  $a_n^{(k)}$  de sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  à  $k$  générateurs (Hall, 1949). Dans le cas  $k = 2$ , les nombres  $a_n^{(2)}$  satisfont la même formule de récurrence que les nombres  $h_{n+1}$  de permutations connexes  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$ . Rappelons que  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est connexe si et seulement si  $\sigma([i]) \neq [i]$  pour tout  $i \in [n-1]$ . Une bijection entre l'ensemble des sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs et l'ensemble des permutations connexes de l'ensemble  $[n+1]$  a été construite par A. W. M. Dress et R. B. Franz (Dress et Franz, 1985).

D. Dumont et G. Kreweras ont étudié une famille particulière de fractions continues liée à la série hypergéométrique

$$\Omega(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n,$$

où  $(a)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a)_n := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a^{\text{cyc}(\sigma)}$  tel que  $\text{cyc}(\sigma)$  est le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$  (Dumont et Kreweras, 1988). Plus précisément, ils ont considéré deux ensembles de polynômes  $F_n(a, b)$  et  $C_n(a, b)$  tels que :

$$F(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) x^n = \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b-1; x)} \quad (6.1)$$

et

$$C(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n = ax \frac{\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \quad (6.2)$$

où  $F_0(a, b) = 1$  et  $C_1(a, b) = a$ . Ils ont donné une signification énumérative aux coefficients de ces polynômes qui sont des entiers non-négatifs. Ils ont établi que pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans  $F_n(a, b)$  est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records et  $s$  anti-records exclusifs et pour tout  $n \geq 2$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans  $C_n(a, b)$  a la même signification pour les permutations connexes de  $[n]$ . Notons que tous les anti-records d'une permutation connexe de l'ensemble  $[n]$  tel que  $n \geq 2$  sont exclusifs.

En utilisant le  $q$ -analogue de la série hypergéométrique, J. Zeng a établi des  $q$ -analogues de toutes les formules de Dumont-Kreweras. En raffinant la bijection construite par ces auteurs, il a trouvé de nouvelles significations énumératives de ces formules (Zeng, 1989). Plus précisément, il a considéré deux ensembles de polynômes  $F_n(a, b, q)$  et  $C_n(a, b, q)$  où  $F_0(a, b, q) = 1$  et  $C_1(a, b, q) = a$ . Il a donné une signification énumérative aux coefficients de ces polynômes qui sont des entiers non-négatifs. Il a établi que pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient de  $a^r b^s q^t$  dans  $F_n(a, b, q)$  est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records,  $s$  anti-records exclusifs et  $t$  inversions. Il a établi aussi que pour tout  $n \geq 2$ , le coefficient de  $a^r b^s q^t$  dans  $C_n(a, b, q)$  a la même signification pour les permutations connexes de  $[n]$ . J. Zeng a proposé un nouveau modèle combinatoire et il a posé le problème d'établir une bijection entre ce nouveau modèle et celui de Dumont-Kreweras. Plus précisément, il a montré que le nombre des permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles et il a posé le problème de trouver une démonstration bijective de cette formule. Comme la bijection de Dress et Franz ne s'applique pas, alors T. Sillke a construit une bijection qui résout le problème posé par Zeng (Sillke, 1989). Cette bijection associe à chaque permutation connexe  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points de sorte que le nombre de records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha$  et le nombre d'anti-records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\beta$ . Sillke dans ((Sillke, 1989), page 1) a donné la formule suivante qui est équivalente



à la formule (6.2) de Dumont et Kreweras donnée ci-haut :

$$G(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = x \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, b; x))) \quad (6.3)$$

où pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans le polynôme  $G_n(a, b)$  est égal au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $r$  cycles et  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $s$  cycles. Ce nombre, par la bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles. P. Ossona de Mendez et P. Rosenstiehl ont aussi construit une bijection entre les permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  et les hypercartes pointées à  $n$  points (Ossona de Mendez et Rosenstiehl, 2004). Leur bijection associe à chaque permutation connexe  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points de sorte que le nombre de records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha$  et le nombre de cycles de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\beta$ . R. Cori a donné une description de cette bijection dans (Cori, 2008).

Dans ce chapitre, qui est indépendant des chapitres précédents, nous donnerons des rappels sur les hypercartes étiquetées, non étiquetées et pointées et aussi sur les permutations connexes. Nous donnerons la nouvelle formule de récurrence suivante concernant le nombre  $h_n$  des permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  :

$$h_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 2 : h_n = n! - \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \cdot h_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right).$$

Nous montrerons cette formule en utilisant les permutations pointées.

Ensuite, nous rappellerons la bijection de Sillke entre les hypercartes pointées à  $n$  points et les permutations connexes dans  $\mathcal{S}_{n+1}$  ainsi que la bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl. Nous poserons le problème ouvert de décrire d'une manière précise le lien entre ces deux bijections.

En remarquant que pour tout  $n \geq 0$  :  $F_n(1, 1) = n!$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $C_n(1, 1) = h_n$ , nous établirons les formules suivantes :

$$h_n = n! - \sum_{p=1}^{n-1} h_p \cdot (n-p)!,$$

$$h_n = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot (n-1-p)!,$$

$$n \cdot n! = h_{n+1} + \sum_{p=1}^{n-1} h_{p+1} \cdot (n-p)!,$$

et

$$n \cdot n! = n \cdot h_n + \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} i! \cdot (n-p-i)! \right).$$

Notons que les deux premières formules précédentes sont données dans (Cori, 2008), la deuxième formule est donnée d'une manière équivalente dans ((Cori, 2009, lemme1)) et la dernière formule est la nouvelle formule donnée ci-haut.

En remarquant que pour tout  $n \geq 0$  : le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $F_n(a, 1)$  est  $s_{n,k}$  le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $k$  cycles et pour tout  $n \geq 1$  : le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $C_n(a, 1)$  est  $c_{n,k}$  le nombre de permutations connexes de  $[n]$  qui ont  $k$  cycles. Nous établirons les formules suivantes :

$$c_{n,k} = s_{n,k} - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min(k,p)} c_{p,i} \cdot s_{n-p,k-i},$$

$$c_{n,k} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i},$$

$$n \cdot s_{n,k} = c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p+1)} c_{p+1,j} \cdot s_{n-p,k-j},$$

et

$$n \cdot s_{n,k} = n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p-\min(k-j,i)} \sum_{t=0}^{\min(k-j,i)} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right).$$

Notons que les deux premières formules précédentes sont données dans ((Cori, 2008), proposition 2) et que les deux dernières formules sont complètement nouvelles.

Nous donnerons la preuve du résultat suivant, conjecturé par notre directeur de recherche Christophe Reutenauer, qui généralise le résultat (6.3) de Sillke donné ci-haut :

$$x \cdot \frac{d}{dx} (\log (\Omega (a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x))) = \sum_{n \geq 1} G_n (a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n, \quad (6.4)$$

où

$$\Omega(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n,$$

tel que  $(a_1, a_2, \dots)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a_1, a_2, \dots)_n := \sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots$  où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  est le type cyclique de la permutation  $\sigma$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$  est un polynôme tel que le coefficient de  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  dans ce polynôme est égal au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tels que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots)$  et que  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de type cyclique  $(m_1, m_2, \dots)$ . Ce nombre, par le bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que le type cyclique de  $\alpha$  est  $(n_1, n_2, \dots)$  et le type cyclique de  $\beta$  est  $(m_1, m_2, \dots)$ .

Nous utiliserons ce résultat pour montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_{1,1,1} = 1 \text{ et } \mathfrak{h}_{1,r,s} = 0 \text{ pour tout } (r, s) \neq (1, 1) \\ \text{et} \\ \mathfrak{h}_{n,r,s} = s_{n,r} \cdot s_{n,s} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \binom{n-1}{k-1} \cdot \mathfrak{h}_{k,i,j} \cdot s_{n-k,r-i} \cdot s_{n-k,s-j}. \end{array} \right.$$

où  $\mathfrak{h}_{n,r,s}$  dénote le nombre d'hypercartes étiquetées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que le nombre de cycles de  $\alpha$  est  $r$  et le nombre de cycles de  $\beta$  est  $s$ . Ce résultat généralise le résultat donné par R. Cori (Cori, 2009, lemme 1).

Nous définissons des polynômes à plusieurs variables, qu'on note par  $F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$  et par  $C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$  qui généralisent les polynômes  $F_n(a, b)$  et  $C_n(a, b)$  de Dumont et Kreweras. Ensuite, nous montrerons le résultat suivant qui généralise le résultat (5') donné dans ((Dumont et Kreweras, 1988), page 28) :

$$F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = 1 + F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) \cdot C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) \quad (6.5)$$

où

$$F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = \sum_{n \geq 0} F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n$$

et

$$C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = \sum_{n \geq 1} C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n.$$

Nous montrerons que

$$C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = a_1 x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x)).$$

Cette formule généralise la formule (6.2) de Dumont et Kreweras donnée ci-haut. En combinant cette formule avec la formule (6.5) précédente, nous donnerons aussi une formule qui généralise la formule (6.1) de Dumont et Kreweras donnée ci-haut.

Nous utiliserons le résultat (6.3) précédent pour donner une expression à la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$$

et aussi à la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$$

où  $\mathcal{C}_n$  dénote l'ensemble des permutations connexes de  $[n]$  et  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  dénote le type cyclique de la permutation  $\sigma$ . En effet, nous montrerons que :

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n}$$

et que

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n = 1 - e^{\sum_{n \geq 1} \frac{-1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n}.$$

Finalement, lorsque l'entier  $n$  est premier, nous montrerons que  $n+1$  est le nombre des sous-groupes normaux d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$ . Trouver ce nombre lorsque  $n$  est arbitraire reste toujours un problème ouvert.

## 6.1 Hypercartes étiquetées, non étiquetées et pointées

**Définition 58** Une hypercarte étiquetée (a hypermap) est un couple  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  tel que le sous-groupe engendré par  $\alpha$  et  $\beta$  dans le groupe  $\mathcal{S}_n$  agit transitivement sur l'ensemble  $[n]$ .

La relation de transitivité est équivalente au fait que le graphe simple orienté ayant l'ensemble  $[n]$  comme ensemble de sommets et l'ensemble  $E$  comme ensemble d'arêtes soit connexe, où

$$E = \{(i, \alpha(i)) \mid i \in [n]\} \cup \{(i, \beta(i)) \mid i \in [n]\}.$$

On note l'ensemble de toutes les hypercartes étiquetées de  $S_n \times S_n$  par  $\mathcal{H}_n$ .

**Définition 59** Deux hypercartes  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  de  $\mathcal{H}_n$  sont isomorphes s'il existe une permutation  $\phi$  de  $[n]$  tel que :

$$\phi \circ \alpha_1 \circ \phi^{-1} = \alpha_2 \text{ et } \phi \circ \beta_1 \circ \phi^{-1} = \beta_2.$$

On écrit  $(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow{\phi} (\alpha_2, \beta_2)$ .

On peut définir formellement une hypercarte non étiquetée comme suit :

**Définition 60** Une hypercarte non étiquetée (unlabeled hypermaps) est un élément de l'ensemble quotient de l'ensemble des hypercartes étiquetées par la relation d'isomorphisme donnée dans la définition 59 précédente.

Par exemple, le couple  $(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha = (12)(3)(45678)$  et  $\beta = (52)(7361)(84)$  est une hypercarte étiquetée à 8 points (voir la figure 6.1 ci-dessous).

**Définition 61** Le poids d'une hypercarte étiquetée  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathcal{H}_n$ , qu'on note par  $w(\alpha, \beta)$ , est défini comme suit :

$$w(\alpha, \beta) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots,$$

où  $(n_1, n_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\alpha$ ,  $(m_1, m_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\beta$  et  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  sont des variables formelles.

Remarquons que dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ ,

$$w(\alpha, \beta) = a^{\text{cyc}(\alpha)} \cdot b^{\text{cyc}(\beta)}.$$



Figure 6.1 Une hypercarte étiquetée à 8 points.

Remarquons aussi que le poids associé à l'hypercarte étiquetée de la figure 6.1 précédente est  $\alpha_2^2 \alpha_4 \beta_1 \beta_2 \beta_5$ . Ce qui correspond au fait que  $\alpha$  a deux cycles de longueur 2 et un cycle de longueur 4 et que  $\beta$  a un cycle de longueur 1, un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 5.

Remarquons que si  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  sont deux hypercartes étiquetées isomorphes de  $\mathcal{H}_n$ , alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont le même type cyclique et  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ont aussi le même type cyclique. Ce qui implique que deux hypercartes étiquetées isomorphes de  $\mathcal{H}_n$  ont le même poids.

Soit  $(\alpha, \beta)$  une hypercarte étiquetée de  $\mathcal{H}_n$ , on sélectionne un point  $i$  de  $[n]$  comme étant un point distingué (a root) et on l'appellera une hypercarte étiquetée pointée. On note l'ensemble de toutes les hypercartes étiquetées pointées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  par  $\mathcal{H}_n^\bullet$ . On peut remarquer facilement que

$$|\mathcal{H}_n^\bullet| = n |\mathcal{H}_n|. \quad (6.6)$$

Par la suite, on peut définir une autre relation d'isomorphisme dans  $\mathcal{H}_n^\bullet$  comme suit :

**Définition 62** Deux hypercartes étiquetées pointées  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  de  $\mathcal{H}_n^\bullet$  telles que  $(\alpha_1, \beta_1)$  a le point  $i$  de  $[n]$  comme un point distingué et  $(\alpha_2, \beta_2)$  a le point  $j$  de  $[n]$

comme un point distingué sont isomorphes s'il existe une permutation  $\phi$  de  $[n]$  tel que :

$$\phi \circ \alpha_1 \circ \phi^{-1} = \alpha_2, \phi \circ \beta_1 \circ \phi^{-1} = \beta_2 \text{ et } \phi(i) = j.$$

On écrit  $(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow{(\phi, i, j)} (\alpha_2, \beta_2)$ . L'ensemble des hypercartes pointées (rooted hypermap) est l'ensemble quotient de l'ensemble  $\mathcal{H}_n^\bullet$  des hypercartes étiquetées pointées par cette relation d'isomorphisme.

On note l'ensemble de toutes les hypercartes pointées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  par  $\mathfrak{C}_n$ .

Il est facile de vérifier que la relation d'isomorphisme dans  $\mathcal{H}_n^\bullet$  donnée dans la définition 62 précédente est une relation d'équivalence. En effet, on peut facilement vérifier qu'elle est réflexive car pour toute hypercarte étiquetée pointée  $(\alpha, \beta)$  ayant le point  $i$  comme point pointé, on a :

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{(Id, i, i)} (\alpha, \beta).$$

Elle est symétrique car si  $(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow{(\phi, i, j)} (\alpha_2, \beta_2)$ , alors

$$(\alpha_2, \beta_2) \xrightarrow{(\phi^{-1}, j, i)} (\alpha_1, \beta_1).$$

Elle est transitive car si  $(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow{(\phi, i, j)} (\alpha_2, \beta_2)$  et  $(\alpha_2, \beta_2) \xrightarrow{(\psi, j, k)} (\alpha_3, \beta_3)$ , alors

$$(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow{(\psi \circ \phi, i, k)} (\alpha_3, \beta_3).$$

On peut aussi vérifier que le cardinal de chaque classe d'équivalence est  $n!$ . En d'autres mots, chaque hypercarte pointée de  $\mathfrak{C}_n$  contient  $n!$  hypercartes étiquetées pointées. Ce qui implique que

$$|\mathcal{H}_n^\bullet| = n! \cdot |\mathfrak{C}_n|. \quad (6.7)$$

**Définition 63** *Le poids d'une hypercarte pointée est le poids commun des  $n!$  hypercartes étiquetées pointées qu'elle contient.*

Maintenant, on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 32** *On a*

$$|\mathcal{H}_n| = (n-1)! \cdot |\mathcal{C}_n|,$$

*c'est-à-dire que le nombre des hypercartes étiquetées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  est égal au produit du nombre des hypercartes pointées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  par  $(n-1)!$ . De plus*

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}_n} w(\alpha, \beta) = (n-1)! \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_n} w(\alpha, \beta).$$

Par exemple, le nombre des hypercartes étiquetées de  $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$  est 26, alors que le nombre des hypercartes pointées de  $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$  est 13. On a bien  $26 = (3-1)! \cdot 13$ .

Pour montrer la proposition précédente, il suffit d'utiliser les identités (6.6) et (6.7) précédentes et de remarquer que

$$n \cdot \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}_n} w(\alpha, \beta) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}_n^\bullet} w(\alpha, \beta) = n! \cdot \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_n} w(\alpha, \beta).$$

**Définition 64** *Une permutation  $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$  de l'ensemble  $[n]$  écrite sous forme d'un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$  est connexe si pour tout  $p < n$  le préfixe  $a_1 a_2 \dots a_p$  possède au moins une lettre  $a_j > p$ .*

En d'autres mots, une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est connexe si pour tout  $i \in [n-1] : \sigma([i]) \neq [i]$ .

On note l'ensemble de toutes les permutations connexes de  $[n]$  par  $\mathcal{C}_n$  et on pose  $h_n = |\mathcal{C}_n|$ .

Maintenant, nous donnons la preuve d'une formule de récurrence concernant  $h_n$  le nombre de permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ . Cette formule est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 17** *Le nombre de permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$h_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 2 : h_n = n! - \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \cdot h_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right). \quad (6.8)$$



## Preuve

Cette formule peut s'écrire

$$h_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 2 : n \cdot n! = n \cdot h_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left( k \cdot h_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right).$$

Pour chaque permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$ , on sélectionne un élément arbitraire  $i$  de  $[n]$  comme un élément distingué et on appelle l'objet obtenu, qu'on note par  $(\sigma, i)$ , une *permutation pointée* de  $[n]$ . Ce qui implique que  $n \cdot n!$  est le nombre des permutations pointées de  $[n]$  et que  $n \cdot h_n$  est le nombre des permutations connexes et pointées de l'ensemble  $[n]$ . Par conséquent, il suffit de montrer que le nombre

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( k \cdot h_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right)$$

est le nombre des permutations non connexes et pointées de  $[n]$ . Comme chaque permutation non connexe de  $[n]$  est une liste ordonnée de permutations connexes, alors lorsqu'on sélectionne un élément arbitraire de  $[n]$ , ce dernier est un élément d'une certaine permutation connexe de  $k$  éléments où  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  dans la liste ordonnée précédente. Ainsi, on a une permutation connexe et pointée de  $[k]$  (Notons que  $k \cdot h_k$  est le nombre des permutations connexes et pointées de  $[k]$ ). Les premiers éléments dans la liste ordonnée situés avant cette permutation connexe et pointée forment une permutation arbitraire de  $[i]$  pour un certain  $i \in \{0, \dots, n-k\}$ , alors que les  $n-k-i$  derniers éléments restants forment une permutation arbitraire de l'ensemble  $\{i+k+1, \dots, n\}$  qu'on peut identifier à une permutation de l'ensemble  $[n-k-i]$ .

□

Posons

$$\Omega(x) := \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n \text{ et } C(x) := \sum_{n \geq 1} h_n \cdot x^n.$$

On peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 8** On a :

$$\frac{d}{dx} (\Omega(x)) = (\Omega(x))^2 \cdot \frac{d}{dx} (C(x)).$$

**Preuve**

En utilisant la relation (6.8) précédente, on a :

$$\begin{aligned}
(\Omega(x))^2 \cdot \frac{d}{dx}(C(x)) &= \left( \sum_{n \geq 1} n \cdot h_n \cdot x^{n-1} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i=0}^n i! \cdot (n-i)! \right) \cdot x^n \right) \\
&= \left( \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot h_{n+1} \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i=0}^n i! \cdot (n-i)! \right) \cdot x^n \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \left( ((k+1) \cdot h_{k+1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right) \right) \cdot x^n \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( ((k+1) \cdot h_{k+1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1-k} i! \cdot (n-1-k-i)! \right) \right) \cdot x^{n-1} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( \left( \sum_{k=0}^{n-2} \left( ((k+1) \cdot h_{k+1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1-k} i! \cdot (n-1-k-i)! \right) \right) + n \cdot h_n \right) \cdot x^{n-1} \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( n \cdot h_n + \left( \sum_{k=1}^{n-1} \left( k \cdot h_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} i! \cdot (n-k-i)! \right) \right) \right) \cdot x^{n-1} \\
(\Omega(x))^2 \cdot \frac{d}{dx}(C(x)) &= \sum_{n \geq 1} (n \cdot n!) \cdot x^{n-1} \\
&= \frac{d}{dx}(\Omega(x)).
\end{aligned}$$

□

## 6.2 Bijection de Sillke entre les permutations connexes de $[n+1]$ et les hypercartes pointées à $n$ points

En 1949, M. Hall a établi la formule de récurrence suivante concernant les nombres  $a_n^{(k)}$  de sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  à  $k$  générateurs

$$a_1^{(k)} = 1 \text{ et } a_n^{(k)} = n \cdot (n!)^{k-1} - \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)!)^{k-1} \cdot a_i^{(k)}, \quad (6.9)$$

où  $a_n^{(k)}$  est le nombre des sous-groupes d'indice  $n$  du groupe libre  $\mathcal{F}_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  à  $k$  générateurs.

Dans le cas  $k = 2$  et en posant  $a_n = a_n^{(2)}$ , on obtient

$$a_1 = 1 \text{ et } a_n = n \cdot n! - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)!.$$

En posant  $a_0 = 1$ , cette formule est transformée en

$$(n+1)! = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)!.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \left( n \cdot n! = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)! \right) &\Rightarrow ((n+1) - 1) \cdot n! = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)! \\ &\Rightarrow (n+1)! = n! + a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)! \\ &\Rightarrow (n+1)! = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (n-i)!. \end{aligned}$$

Ce qui implique directement que les  $a_n$  coïncident avec les  $h_{n+1}$  où  $h_{n+1}$  est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{C}_{n+1}$  de toutes les permutations connexes  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$ . Rappelons que  $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$  est une permutation connexe si  $\sigma(\{1, \dots, i\}) \neq \{1, \dots, i\}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . En effet, l'ensemble  $\mathcal{S}_{n+1}$  de toutes les  $(n+1)!$  permutations de  $[n+1]$  peut être partitionné en des sous-ensembles  $\mathcal{S}_{n+1}^i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) de toutes les permutations  $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$  pour lesquelles

$$i = \min \{ \ell \mid \sigma(\{1, \dots, \ell\}) = \{1, \dots, \ell\} \}.$$

Pour tout  $i = 1, \dots, n+1$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_{n+1}^i$  peut être facilement identifié avec le produit cartésien  $\mathcal{C}_i \times \mathcal{S}_{n+1-i}$ . Comme  $h_1 = 1$ , alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 1 \\ \text{et} \\ (n+1)! = |\mathcal{S}_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{S}_{n+1}^i| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{C}_i| \cdot |\mathcal{S}_{n+1-i}| = \sum_{i=1}^{n+1} h_i \cdot (n+1-i)! = \sum_{i=0}^n h_{i+1} \cdot (n-i)!. \end{array} \right.$$

Les  $h_{n+1}$  satisfont la même formule de récurrence que les  $a_n$ , ce qui implique que

$$a_n = h_{n+1} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Une bijection entre l'ensemble des sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs et l'ensemble des permutations connexes  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n\}$  a été construite par A. W. M. Dress et R. B. Franz. La bijection de Dress et Franz associe à chaque sous-groupe  $H$  d'indice  $n$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points comme suit :

Les points de cette hypercarte sont les éléments de l'ensemble  $\mathcal{F}_2/H$  et le point pointé est l'élément  $H$  et les deux permutations  $\alpha$  et  $\beta$  sont des permutations de l'ensemble  $\mathcal{F}_2/H$  définies comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathcal{F}_2/H & \longrightarrow & \mathcal{F}_2/H \\ gH & \longmapsto & x_1 gH \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \beta : \mathcal{F}_2/H & \longrightarrow & \mathcal{F}_2/H \\ gH & \longmapsto & x_2 gH \end{array} .$$

La bijection inverse associe à chaque hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points un sous-groupe  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  comme suit :

Soient  $A$  l'ensemble des  $n$  points de l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  et  $p \in A$  le point pointé. Alors le sous-groupe  $H$  est l'ensemble de tous les mots  $w$  de la forme

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_1^{\varepsilon_3} x_2^{\varepsilon_4} \dots$$

où  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots\} \subseteq \{-1, 1\}$  et  $(\alpha^{\varepsilon_1} \beta^{\varepsilon_2} \alpha^{\varepsilon_3} \beta^{\varepsilon_4} \dots)(p) = p$ .

Par exemple, pour l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_7 \times \mathcal{S}_7$  telle que  $\alpha = (1 \ 4 \ 5 \ \mathbf{7})(2)(3)(6)$  et  $\beta = (1 \ 6 \ 4 \ 5)(2 \ 3 \ \mathbf{7})$  avec le point pointé  $p = \mathbf{7}$  (voir la figure 6.2 ci-dessous), les éléments du sous-groupe associé  $H$  sont en bijection avec les chemins fermés de  $p$  vers  $p$  dans la graphe donné dans la figure 6.2 ci-dessous.

Par exemple, le chemin fermé du point pointé 7 vers 7 en passant respectivement par les points 1, 6, 4, 1, 5, 7, 2, 3 et 2 correspond au mot  $x_1 x_2^2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^2 x_2^{-2}$  qui est un élément du sous-groupe  $H$ .

**Définition 65** *Étant donnée une permutation  $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$  de l'ensemble  $[n]$ , un terme  $a_p$  est appelé un record, s'il n'existe aucun terme plus grand à sa gauche, c'est-*

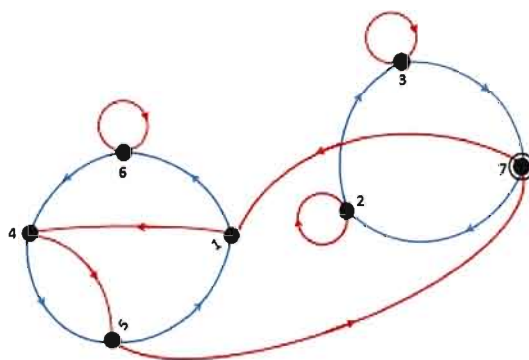


Figure 6.2 Une hypercarte pointée à 7 points.

à-dire si  $a_i < a_p$  pour tout  $i < p$ . L'entier  $p$  est la position du record  $a_p$ . Un terme  $a_p$  est appelé un anti-record, s'il n'existe aucun terme plus petit à sa droite, c'est-à-dire si  $a_p < a_j$  pour tout  $p < j$ . Nous appelons anti-record exclusif tout anti-record qui n'est pas un record et anti-record en même temps.

Notons que si  $\sigma$  est une permutation connexe de l'ensemble  $[n]$  tel que  $n \geq 2$ , alors aucun de ses termes  $a_p$  ne peut être à la fois record et anti-record, en d'autres mots tous les anti-records d'une permutation connexe de l'ensemble  $[n]$  tel que  $n \geq 2$  sont exclusifs.

Maintenant, nous donnons la bijection de Sillke entre les permutations connexes de l'ensemble  $[n + 1]$  et les hypercartes pointées à  $n$  points.

Soit  $\sigma = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$  une permutation connexe de l'ensemble  $[n + 1]$ . La bijection de Sillke associe à  $\sigma$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points comme suit :

- Soient  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  les records de  $\sigma$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n + 1$ . Remarquons que la position  $i_1$  du plus petit record  $a_{i_1}$  est toujours égale à 1 et que le plus grand record  $a_{i_k}$  est toujours égal à  $n + 1$ . Posons

$$\alpha' = (a_{i_1} a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}) (a_{i_2} \cdots a_{i_3-1}) \cdots (a_{i_k} \cdots a_{n+1}).$$

Remarquons que  $\alpha'$  est une permutation de  $[n+1]$  et que le nombre de cycles de  $\alpha'$  est égal au nombre de records de  $\sigma$ . Soit  $\alpha$  la permutation de  $[n]$  obtenue de  $\alpha'$  en supprimant  $n+1$ . Comme  $\sigma$  est connexe alors le cycle dans  $\alpha'$  contenant  $n+1$  est de longueur supérieure ou égale à 2, ce qui implique que le nombre de cycles de  $\alpha$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha'$  et donc au nombre de records de  $\sigma$ .

- Soient  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_p}$  les anti-records de  $\sigma$  tels que  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n+1$ . Remarquons que le plus grand anti-record  $a_{j_p}$  est toujours égale à  $a_{n+1}$  et que le plus petit anti-record  $a_{j_1}$  est toujours égal à 1. Posons

$$\beta' = (a_{j_1} (a_{j_1} + 1) \cdots (a_{j_2} - 1)) (a_{j_2} \cdots (a_{j_3} - 1)) \cdots (a_{j_p} \cdots n+1)$$

Remarquons que  $\beta'$  est une permutation de  $[n+1]$  et que le nombre de cycles de  $\beta'$  est égal au nombre d'anti-records de  $\sigma$ . Soit  $\beta$  la permutation de  $[n]$  obtenue de  $\beta'$  en supprimant  $n+1$ . Comme  $\sigma$  est connexe alors  $n+1$  ne peut pas être un anti-record de  $\sigma$ , ce qui implique que le cycle dans  $\beta'$  contenant  $n+1$  est de longueur supérieure ou égale à 2. Ainsi, le nombre de cycles de  $\beta$  est égal au nombre de cycles de  $\beta'$  et donc au nombre d'anti-records de  $\sigma$ .

- L'élément pointé selon Sillke est  $a_{n+1}$ . Remarquons que le dernier cycle de  $\alpha'$  est  $(n+1 \cdots a_{n+1})$  et que le dernier cycle de  $\beta'$  est  $(a_{n+1} \cdots n+1)$ .

Par exemple, pour  $\sigma = 531649287$  une permutation connexe de l'ensemble [9]. Les records de  $\sigma$  sont 5, 6 et 9, ce qui implique que  $\alpha' = (531)(64)(9287)$  et donc

$$\alpha = (531)(64)(287).$$

Les anti-records de  $\sigma$  sont 1, 2 et 7, ce qui implique que  $\beta' = (1)(23456)(789)$  et donc

$$\beta = (1)(23456)(78).$$

L'élément pointé est 7.

Réciproquement, la bijection de Sillke associe à chaque hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$ . Nous allons expliquer comment obtenir

$\sigma$  à partir de  $(\alpha, \beta)$  et tout au long de cette explication, nous allons se servir d'un exemple illustratif. On prend pour cet exemple l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à 8 points ayant l'élément 8 comme point pointé telle que  $\alpha = (17)(432)(685)$  et  $\beta = (4)(731)(6582)$ .

Supposons que l'élément pointé est  $u$ , que  $\alpha$  a  $p$  cycles et que  $\beta$  a  $k$  cycles. Pour notre exemple  $u = 8$ ,  $p = 3$  et  $k = 3$ . La première étape consiste à écrire le cycle dans  $\alpha$  contenant  $u$  de sorte qu'il termine par  $u$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma_p$ . De même on écrit le cycle dans  $\beta$  contenant  $u$  de sorte qu'il commence par  $u$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma'_k$ . Pour notre exemple, on obtient après cette première étape

$$\Gamma_3 = (568) \text{ et } \Gamma'_3 = (8256).$$

La deuxième étape consiste à déterminer le premier élément  $v$  situé le plus à droite dans  $\Gamma_p$  qui n'est pas dans  $\Gamma'_k$ . De même, on détermine le premier élément  $v'$  situé le plus à droite dans  $\Gamma'_k$  qui n'est pas dans  $\Gamma_p$ . Au moins un des deux éléments  $v$  ou  $v'$  existe car dans le cas contraire  $\Gamma_p = \Gamma'_k$ , ce qui contredit le fait que  $(\alpha, \beta)$  est une hypercarte pointée. Pour notre exemple illustratif,  $v$  n'existe pas alors que  $v' = 2$ . Ensuite, on écrit le cycle dans  $\alpha$  contenant  $v$  à gauche de  $\Gamma_p$  de sorte qu'il commence par  $v$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma_{p-1}$ . Ainsi, on obtient la liste de cycles suivante :  $\Gamma_{p-1}\Gamma_p$ . De même on écrit le cycle dans  $\beta$  contenant  $v'$  à gauche de  $\Gamma'_k$  de sorte qu'il commence par  $v'$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma'_{k-1}$ . Ainsi, on obtient la liste de cycles suivante :  $\Gamma'_{k-1}\Gamma'_k$ . Pour notre exemple, on obtient après cette étape les deux listes de cycles suivantes :

$$(243)(568) \text{ et } (8256).$$

On répète à chaque fois cette procédure jusqu'à ce qu'on écrit tous les cycles de  $\alpha$  et tous les cycles de  $\beta$ . C'est-à-dire à chaque fois on cherche dans la première liste de cycles le premier élément situé le plus à droite qui n'est pas dans la deuxième liste de cycles. Si cet élément qu'on note par  $v$  existe, alors on ajoute à la deuxième liste de cycles un nouveau cycle qu'on écrira à sa gauche et qui est le cycle dans  $\alpha$  contenant  $v$  de sorte qu'il commence par  $v$ . De même, on cherche dans la deuxième liste de cycles le premier élément situé le plus à droite qui n'est pas dans la première liste de cycles. Si cet élément

qu'on note par  $v'$  existe, alors on ajoute à la première liste de cycles un nouveau cycle qu'on écrira à sa gauche et qui est le cycle dans  $\beta$  contenant  $v'$  de sorte qu'il commence par  $v'$ . Pour notre exemple, on obtient

$$(243)(568) \text{ et } (317)(8256).$$

Finalement, on obtient

$$(71)(243)(568) \text{ et } (4)(317)(8256).$$

L'étape suivante consiste à ajouter  $n+1$  à la première liste au début du cycle contenant l'élément pointé  $u$  et à la deuxième liste à la fin du cycle contenant l'élément pointé  $u$ . Pour notre exemple illustratif, on obtient

$$(71)(243)(9568) \text{ et } (4)(317)(82569).$$

Jusqu'à maintenant, on a obtenu deux permutations de l'ensemble  $[n+1]$  de sorte que chacune est écrite sous forme d'une liste de cycles. L'étape suivante consiste à supprimer les parenthèses dans les deux listes de cycles précédentes pour obtenir deux mots de longueur  $n+1$ . Ces deux mots sont deux permutations de l'ensemble  $[n+1]$ , qu'on note respectivement par  $\alpha'$  et  $\beta'$ , chacune écrite sous forme d'un mot. Pour notre exemple,

$$\alpha' = 712439568 \text{ et } \beta' = 431782569.$$

La dernière étape consiste à écrire la permutation connexe  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$  comme suit :  $\sigma$  est obtenue comme mot de  $n+1$  lettres en remplaçant chaque lettre  $i$  dans  $\alpha'$  par la lettre  $(\beta')^{-1}(i)$ . Pour notre exemple, on remplace la lettre 7 dans  $\alpha'$  par 4 car  $(\beta')^{-1}(7) = 4$  et ainsi de suite et on obtient

$$\sigma = 436129785.$$

Maintenant, nous allons utiliser la bijection de Sillke pour montrer le résultat de la proposition suivante donné par la formule (6.9) précédente établie par M. Hall dans le cas particulier  $k = 2$ .



**Proposition 33** *Le nombre de sous-groupes d'indice  $n$  du groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$a_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 2 : a_n = n \cdot n! - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (n-i)!, \quad (6.10)$$

où  $a_n$  est le nombre de sous-groupes d'indice  $n$  du groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs.

### Preuve

Par la proposition 32 précédente, on peut déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n = |\mathfrak{C}_n| = \frac{|\mathcal{H}_n|}{(n-1)!}. \quad (6.11)$$

Ainsi, la formule de récurrence (6.10) donnée ci-haut peut s'écrire

$$\text{pour tout } n \geq 2 : \frac{|\mathcal{H}_n|}{(n-1)!} = n \cdot n! - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\mathcal{H}_i|}{(i-1)!} \cdot (n-i)!,$$

où  $|\mathcal{H}_1| = 1$ , ce qui équivaut pour tout  $n \geq 2$  :

$$(n!)^2 = |\mathcal{H}_n| + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\mathcal{H}_i| \cdot (n-i)! \cdot (n-1)!}{(i-1)!}. \quad (6.12)$$

En effet, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= |\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n| \\ &= |\mathcal{H}_n| + |(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n) \setminus \mathcal{H}_n|. \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de montrer que

$$|(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n) \setminus \mathcal{H}_n| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\mathcal{H}_i| \cdot (n-i)! \cdot (n-1)!}{(i-1)!}.$$

Or à chaque couple  $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  qui n'est pas dans  $\mathcal{H}_n$  correspond un sous-ensemble propre et unique  $A$  de  $[n]$  contenant 1, tel que les restrictions  $\sigma' = \sigma_A$  et  $\tau' = \tau_A$  sont deux permutations de l'ensemble  $A$  telles que le sous-groupe engendré par  $\sigma_A$  et  $\tau_A$  dans le groupe  $\mathcal{S}_A$  de toutes les permutations de  $A$  agit transitivement sur  $A$  (en

d'autres mots  $(\sigma_A, \tau_A)$  est une hypercarte étiquetée). Les autres restrictions  $\sigma'' = \sigma_{[n] \setminus A}$  et  $\tau'' = \tau_{[n] \setminus A}$  sont des permutations quelconques de  $[n] \setminus A$ . On peut écrire

$$|(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n) \setminus \mathcal{H}_n| = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_A |\mathcal{H}_i| \cdot ((n-i)!)^2,$$

où  $A$  est de cardinal  $i$  et contient 1 (remarquons que  $1 \leq i \leq n-1$  et que  $(\sigma', \tau') \in \mathcal{H}_i$  et que  $(\sigma'', \tau'') \in \mathcal{S}_{[n]-A} \times \mathcal{S}_{[n]-A} \simeq \mathcal{S}_{n-i} \times \mathcal{S}_{n-i}$  et que  $|\mathcal{S}_{n-i} \times \mathcal{S}_{n-i}| = ((n-i)!)^2$ ). Par conséquent,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n) \setminus \mathcal{H}_n| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_A |\mathcal{H}_i| \cdot ((n-i)!)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \cdot |\mathcal{H}_i| \cdot ((n-i)!)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-i)! \cdot (i-1)!} \cdot |\mathcal{H}_i| \cdot ((n-i)!)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\mathcal{H}_i| \cdot (n-i)! \cdot (n-1)!}{(i-1)!}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

La formule (6.11) donnée ci-haut peut s'écrire  $|\mathcal{H}_n| = (n-1)! \cdot a_n$ . Par la bijection de Sillke  $a_n = h_{n+1}$  où  $h_{n+1}$  est le nombre de permutations connexes de  $[n+1]$ . Ce qui implique que  $|\mathcal{H}_n| = (n-1)! \cdot h_{n+1}$ . Ce résultat montre que le nombre de toutes les hypercartes étiquetées à  $n$  points est égal au produit du nombre de permutations connexes de  $[n+1]$  par  $(n-1)!$ . Cori a donné ce résultat dans ((Cori, 2009), lemme 2).

Notons que la formule (6.12) donnée ci-haut peut s'écrire

$$(n!)^2 = |\mathcal{H}_n| + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} |\mathcal{H}_i| (n-i)! (n-i)!.$$

Cette formule a été déjà donnée par Cori ((Cori, 2009), lemme 1).

Maintenant, nous allons décrire la **bijection d'Ossoona de Mendez et Rosenstiehl** comme le fait R. Cori dans (Cori, 2008).

P. Ossona de Mendez et P. Rosenstiehl ont établi une bijection entre les permutations connexes de l'ensemble  $[n+1]$  et les hypercartes pointées à  $n$  points ayant le point  $n$  comme point pointé. Soit  $\sigma = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$  une permutation connexe de l'ensemble  $[n+1]$ . La bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl associe à  $\sigma$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points ayant le point  $n$  comme point pointé comme suit :

- Soient  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  les records de  $\sigma$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1$ . Remarquons que  $i_1$  la position du plus petit record de  $\sigma$  est toujours égale à 1. Soit

$$\alpha' = (i_1 \ (i_1 + 1) \cdots (i_2 - 1)) (i_2 \cdots (i_3 - 1)) \cdots (i_k \cdots (n+1)).$$

Remarquons que  $\alpha'$  est une permutation de  $[n+1]$  et que le nombre de cycles de  $\alpha'$  est égal au nombre de records de  $\sigma$ . Soit  $\alpha$  la permutation de  $[n]$  obtenue de  $\alpha'$  en supprimant  $n+1$ . Comme  $\sigma$  est connexe alors le cycle dans  $\alpha'$  contenant  $n+1$  est de longueur supérieure ou égale à 2 car  $i_k$  est différent de  $(n+1)$ , ce qui implique que le nombre de cycles de  $\alpha$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha'$  et donc au nombre de records de  $\sigma$ .

- Soit  $p$  le nombre de cycles de  $\sigma$ . Écrivons la permutation  $\sigma$  sous sa forme cyclique

$$\sigma = (a_{j_1} \cdots a_{j_2-1}) (a_{j_2} \cdots a_{j_3-1}) \cdots (a_{j_p} \cdots n+1)$$

de sorte que  $a_{j_1} < a_{j_2} < \dots < a_{j_p}$  et pour chaque  $k \in [p]$ ,  $a_{j_k}$  est le plus petit élément dans le cycle qui le contient. Soit  $\beta$  la permutation de  $[n]$  obtenue de  $\sigma$  en supprimant  $n+1$ . Comme  $\sigma$  est une permutation connexe, alors le cycle dans  $\sigma$  contenant  $n+1$  est de longueur supérieure ou égale à 2, ce qui implique que le nombre de cycles de  $\beta$  est égal au nombre de cycles de  $\sigma$ .

- L'élément pointé selon Ossona de Mendez et Rosenstiehl est  $n$ .

Par exemple, pour  $\sigma = 531649287$  une permutation connexe de l'ensemble  $[9]$ . Les entiers 1, 4 et 6 sont les positions des records de  $\sigma$  qui sont 5, 6 et 9, ce qui implique que  $\alpha' = (123) (45) (6789)$  et donc

$$\alpha = (123) (45) (678).$$

En écrivant  $\sigma$  sous sa forme cyclique comme décrit ci-dessus, on obtient  $\sigma = (15469723) (8)$ , ce qui implique que

$$\beta = (1546723) (8).$$

Le point pointé est 8.

Réciproquement, la bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl associe à chaque hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points ayant  $n$  comme point pointé une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $[n + 1]$ . Nous allons expliquer comment obtenir  $\sigma$  à partir de  $(\alpha, \beta)$  et tout au long de cette explication, nous allons se servir d'un exemple illustratif. On prend pour cet exemple l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à 8 points ayant 8 comme point pointé telle que  $\alpha = (17) (432) (685)$  et  $\beta = (4) (731) (6582)$ .

Soient  $p$  et  $q$  les nombres de cycles des permutations  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. Pour notre exemple  $p = 3$  et  $q = 3$ . La première étape consiste à écrire le cycle dans  $\alpha$  contenant  $n$  de sorte qu'il termine par  $n$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma_p$ . Pour notre exemple, on obtient après cette première étape

$$\Gamma_3 = (568).$$

Ensuite, on cherche dans la liste de cycles précédente constituée jusqu'à maintenant du cycle  $\Gamma_p$  précédent, l'élément  $v$  situé le plus à droite qui vérifie  $\beta^{-1}(v)$  n'est pas un élément dans cette liste de cycles. Pour notre exemple illustratif,  $v = 6$ . Cet élément  $v$  existe toujours car dans le cas contraire il y aura un cycle commun dans  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui contredit le fait que  $(\alpha, \beta)$  est une hypercarte pointée. Ensuite, on écrit le cycle dans  $\alpha$  contenant  $\beta^{-1}(v)$  à gauche de  $\Gamma_p$  de sorte qu'il commence par  $\beta^{-1}(v)$ . On va noter ce cycle par  $\Gamma_{p-1}$ . Ainsi, on obtient la liste de cycles suivante :  $\Gamma_{p-1}\Gamma_p$ . Pour notre exemple, on obtient après cette étape la liste de cycles suivante :

$$(243)(568).$$

On répète à chaque fois cette procédure jusqu'à ce qu'on écrit tous les cycles de  $\alpha$ . C'est-à-dire à chaque fois on cherche dans cette liste de cycles le premier élément, qu'on note par  $v$ , situé le plus à droite tel que  $\beta^{-1}(v)$  n'est pas dans cette liste de cycles.

Ensuite, on ajoute à cette liste de cycles le cycle de  $\alpha$  contenant  $\beta^{-1}(v)$  de sorte qu'il commence par  $\beta^{-1}(v)$ . Pour notre exemple, on obtient

$$\alpha = (71)(243)(568).$$

Soit  $\phi$  la permutation de  $[n]$  écrite sous forme d'un mot et qui est obtenue de la permutation  $\alpha$  en supprimant toutes les parenthèses. Pour notre exemple,

$$\phi = 71243568 \text{ et } \phi^{-1} = 23546718.$$

Posons  $\alpha' = \phi^{-1} \circ \alpha \circ \phi$  et  $\beta' = \phi^{-1} \circ \beta \circ \phi$ . Pour notre exemple

$$\alpha' = (21)(453)(786) \text{ et } \beta' = (4)(152)(7683).$$

La dernière étape consiste à écrire  $\beta'$  sous forme d'un mot en les lettres  $1, 2, \dots, n$ . Ensuite obtenir la permutation connexe  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$  sous forme de mot en les lettres  $1, 2, \dots, n+1$  en insérant la lettre  $(n+1)$  dans le mot  $\beta'$ . Soit  $\ell$  la longueur du cycle dans  $\alpha$  contenant l'élément  $(n+1)$ . On insère la lettre  $(n+1)$  dans le mot  $\beta'$  de sorte qu'elle soit la  $(n-\ell)$ -ème lettre de  $\sigma$ , c'est-à-dire on aura  $\ell$  lettres dans le mot  $\sigma$  qui sont situées à droite de  $(n+1)$ . Pour notre exemple,  $\ell = 3$  et donc

$$\sigma = 517429863$$

car  $\beta' = 51742863$ .

### 6.3 Nouvelles formules pour les permutations connexes

Soient

$$\Omega(x) := 1 + \sum_{n \geq 1} |\mathcal{S}_n| \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n,$$

$$C(x) := \sum_{n \geq 1} |\mathcal{C}_n| \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} h_n \cdot x^n,$$

$$F(a; x) := \sum_{n \geq 0} F_n(a) \cdot x^n$$

et

$$C(a; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a) \cdot x^n$$

où  $F_0(a) := 1$ , pour tout  $n \geq 1$  :

$$F_n(a) := \sum_{k=1}^n s_{n,k} \cdot a^k$$

où  $s_{n,k}$  dénote le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $k$  cycles,  $C_1(a) := a$  et pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(a) := \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} \cdot a^k$$

où  $c_{n,k}$  dénote le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $k$  cycles.

Dans toute la suite de ce chapitre, on note par  $[x^n](P(x))$  le coefficient de  $x^n$  dans le polynôme  $P(x)$  et par  $[x^n y^m](Q(x, y))$  le coefficient de  $x^n y^m$  dans le polynôme  $Q(x, y)$ .

Soit

$$\Omega(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n,$$

tel que  $(a)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a)_n := \sum_{\sigma \in S_n} a^{\text{cyc}(\sigma)} = a(a+1) \cdots (a+n-1)$  où  $\text{cyc}(\sigma)$  dénote le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$ . Dumont et Kreweras dans (Dumont et Kreweras, 1988) ont montré que

$$C(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) \cdot x^n = ax \frac{\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \quad (6.13)$$

où  $C_1(a, b) = a$  et pour tout  $n \geq 2$  :  $C_n(a, b)$  est un polynôme en  $a$  et  $b$  comme variables tel que le coefficient de  $a^r b^s$  dans ce polynôme est égal au nombre de permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records. Ils ont aussi montré que

$$F(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) \cdot x^n = \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b-1; x)} \quad (6.14)$$

où  $F_0(a, b) = a$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $F_n(a, b)$  est un polynôme en  $a$  et  $b$  comme variables tel que le coefficient de  $a^r b^s$  dans ce polynôme est égal au nombre de permutations

de l'ensemble  $[n]$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records exclusifs. Ils ont donné les formules suivante :

$$\Omega(a, b; x) = \Omega(a, b-1; x) + ax\Omega(a+1, b; x), \quad (6.15)$$

$$F(a, b; x) - 1 = F(a, b; x) \cdot C(a, b; x), \quad (6.16)$$

$$ax\Omega(a+1, b; x) - ax\Omega(a, b; x) = x^2 ab\Omega(a+1, b+1; x), \quad (6.17)$$

$$C(a, b; x) - ax = bx F(a, b+1; x) - bx, \quad (6.18)$$

$$C(a, b; x) - ax = abx^2 \frac{\Omega(a+1, b+1; x)}{\Omega(a, b; x)}, \quad (6.19)$$

$$C_n(a, b) = bF_{n-1}(a, b+1) \text{ pour tout } n \geq 1, \quad (6.20)$$

et

$$F_n(a, b) = \sum_{p=1}^n C_p(a, b) \cdot F_{n-p}(a, b) \text{ pour tout } n \geq 1. \quad (6.21)$$

Le lien entre toutes les formules précédentes de Dumont et Kreweras et les séries formelles  $\Omega(x)$ ,  $C(x)$ ,  $C(a; x)$  et  $F(a; x)$  est très étroit. En effet, dans toute la suite de cette section, nous donnons des propositions qui décrivent ce lien d'une manière précise.

**Proposition 34** *On a :*

$$\Omega(x) = \Omega(1, 1; x), \quad h_n = C_n(1, 1), \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } \Omega(x) - 1 = \Omega(x) \cdot C(x).$$

### Preuve

Comme

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$$

$$\text{alors } (0)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \text{ et pour tout } n \geq 0 : (1)_n = n! \text{ et } (2)_n = (n+1)!. \text{ Ainsi}$$

$$\Omega(x) := 1 + \sum_{n \geq 1} |\mathcal{S}_n| \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(1)_n \cdot (1)_n}{n!} \cdot x^n = \Omega(1, 1; x).$$

Dumont et Kreweras ont montré que  $C_1(a, b) = a$  et que pour tout  $n \geq 2$  :  $[a^r b^s](C_n(a, b))$  est le nombre de permutations connexes de  $[n]$  qui ont  $r$  records et  $s$  anti-records. On

peut déduire directement que  $C_1(1, 1) = 1$  et que pour tout  $n \geq 2$  :  $C_n(1, 1)$  est le nombre de permutations connexes de  $[n]$ . Ainsi on a :

$$C_n(1, 1) = h_n, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ce qui implique que

$$C(x) = \sum_{n \geq 1} h_n \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} C_n(1, 1) \cdot x^n = C(1, 1; x).$$

Mais par la formule (6.13) de Dumont et Kreweras donnée ci-haut, on obtient

$$C(1, 1; x) = \frac{1 \cdot x \cdot \Omega(1 + 1, 1; x)}{\Omega(1, 1; x)} = \frac{\sum_{n \geq 1} n! \cdot x^n}{\sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n} = \frac{\Omega(x) - 1}{\Omega(x)}.$$

Et donc

$$\Omega(x) - 1 = \Omega(x) \cdot C(x).$$

□

Maintenant nous allons donner une nouvelle preuve pour le lemme suivant dont le résultat a été donné par R. Cori ((Cori, 2008), corollaire, page 6) :

**Lemme 23** *Pour tout  $n \geq 2$  :*

$$c(n, k) = c_{n, k}.$$

où  $c(n, k)$  dénote le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $k$  records.

En d'autres mots, le nombre de permutations connexes de  $[n]$  qui ont  $k$  records est égal au nombre de permutations connexes de  $[n]$  qui ont  $k$  cycles.

### Preuve

Posons

$$A = \{S(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{C}_{n+1}\} \text{ et } B = \{OMR(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{C}_{n+1}\}$$

où  $S$  désigne la bijection de Sillke entre  $\mathcal{C}_{n+1}$  et  $\mathfrak{C}_n$  et  $OMR$  désigne la bijection d'Osona de Mendez et Rosenstiehl entre  $\mathcal{C}_{n+1}$  et  $\mathfrak{C}_n$ . Chaque ensemble des deux ensembles



$A$  et  $B$  constitue un ensemble de représentants pour l'ensemble de toutes les hypercartes pointées dans  $\mathfrak{C}_n$  car une hypercarte pointée est une classe d'équivalence. En utilisant l'ensemble  $A$  comme un ensemble de représentants pour  $\mathfrak{C}_n$ , on peut déduire que le nombre de permutations connexes  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $r$  records est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles. De même, le nombre de permutations connexes  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  anti-records est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\beta$  a  $s$  cycles. En utilisant l'ensemble  $B$  comme un ensemble de représentants pour  $\mathfrak{C}_n$ , on peut déduire que le nombre de permutations connexes  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  cycles est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\beta$  a  $s$  cycles. Ce qui implique que : *le nombre de permutations connexes dans  $\mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  cycles est égal au nombre de permutations connexes dans  $\mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  anti-records*. En utilisant la bijection  $\sigma \longrightarrow \sigma^{-1}$  qui transforme une permutation connexe en une permutation connexe en échangeant les nombres de records et d'anti-records, on peut déduire que *le nombre de permutations connexes dans  $\mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  cycles est égal au nombre de permutations connexes dans  $\mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  records*.

□

Maintenant on peut déduire le corollaire suivant dont le résultat bien connu peut être obtenu directement de la formule (6.21) de Dumont et Kreweras donnée ci-haut en remplaçant  $a$  par 1 et  $b$  par 1.

**Corollaire 9** *Pour tout  $n \geq 1$*

$$n! = h_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot (n-k)!.$$

**Preuve**

Comme  $C(x) \cdot \Omega(x) = \Omega(x) - 1$ , alors

$$\left( \sum_{n \geq 1} h_n \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n \right) = \sum_{n \geq 1} n! \cdot x^n.$$

Ainsi

$$\sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n h_k \cdot (n-k)! \right) \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} n! \cdot x^n$$

Ce qui implique que pour tout  $n \geq 1$  :

$$n! = \sum_{k=1}^n h_k \cdot (n-k)!.$$

□

La proposition suivante donne le lien entre les séries formelles  $C(a; x)$  et  $F(a; x)$  et les formules (6.1) et (6.2) de Dumont et Kreweras données ci-haut au début de ce chapitre. Le dernier résultat dans cette proposition est donné dans ((Cori, 2008), page 5).

**Proposition 35** *On a :*

$$\begin{aligned} C_n(a) &= C_n(a, 1), \text{ pour tout } n \geq 2, \\ C(a; x) &= C(a, 1; x) = \frac{a \cdot x \cdot \sum_{n \geq 0} (a+1)_n \cdot x^n}{\sum_{n \geq 0} (a)_n \cdot x^n}, \end{aligned}$$

$$F_n(1, 1) = n!, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

$$F_n(a) = F_n(a, 1) = (a)_n,$$

et

$$F(a; x) = F(a, 1; x) = \Omega(a, 1; x) = \sum_{n \geq 0} (a)_n \cdot x^n.$$

De plus pour tout  $n \geq 1$

$$s(n, k) = s_{n,k}$$

où  $s(n, k)$  dénote le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $k$  records.

**Preuve**

En utilisant le lemme 23 précédent. on peut déduire que pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(a) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} \cdot a^k = \sum_{k=1}^{n-1} c(n, k) \cdot a^k = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \left[ a^k \right] (C_n(a, 1)) \right) \cdot a^k = C_n(a, 1).$$

Ainsi

$$C(a; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a) \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} C_n(a, 1) \cdot x^n = C(a, 1; x).$$

Mais

$$C(a, 1; x) = \frac{a \cdot x \cdot \Omega(a+1, 1; x)}{\Omega(a, 1; x)} = \frac{a \cdot x \cdot \sum_{n \geq 0} (a+1)_n \cdot x^n}{\sum_{n \geq 0} (a)_n \cdot x^n}.$$

Comme  $(a)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1 : (a)_n = \sum_{\sigma \in S_n} a^{\text{cyc}(\sigma)}$ , alors pour tout  $k \in [n] :$   
 $[a^k]((a)_n) = s_{n,k}$ . Ce qui implique que

$$F_n(a) = \sum_{k=1}^n s_{n,k} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n-1} \left( [a^k]((a)_n) \right) \cdot a^k = (a)_n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi

$$F(a; x) := \sum_{n \geq 0} F_n(a) \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} (a)_n \cdot x^n = \Omega(a, 1; x).$$

Comme  $\Omega(a, 0; x) = 1$ , alors

$$F(a; x) = \frac{\Omega(a, 1; x)}{\Omega(a, 0; x)} = \frac{\Omega(a, 1; x)}{\Omega(a, 1-1; x)} = F(a, 1; x) = \sum_{n \geq 0} F_n(a, 1) \cdot x^n.$$

Ce qui implique que

$$F_n(a, 1) = F_n(a) = (a)_n, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Dumont et Kreweras ont montré que  $F_0(a, b) = 1$  et que pour tout  $n \geq 1 : [a^r b^s](F_n(a, b))$  est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records et  $s$  anti-records exclusifs. On peut déduire directement que  $F_0(1, 1) = 1$  et que pour tout  $n \geq 1 : F_n(1, 1)$  est le nombre de permutations de  $[n]$ . Ainsi on a :

$$F_n(1, 1) = n!, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On peut déduire aussi que  $F_0(a, 1) = 1$  et que pour tout  $n \geq 1 : [a^r](F_n(a, 1))$  est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records. D'après ce qui précède,  $[a^r](F_n(a, 1))$  est égal à  $[a^r]((a)_n)$  qui est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  cycles. Par conséquent, le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records est égal à  $s_{n,r}$  le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  cycles, c'est-à-dire  $s(n, k) = s_{n,k}$ .

□

On peut déduire le corollaire suivant qui donne une formule donnée dans ((Cori, 2008), proposition 2, page 7).

**Corollaire 10** *Pour tout  $n \geq 2$*

$$c_{n,k} = s_{n,k} - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(k,p)} c_{p,i} \cdot s_{n-p,k-i}.$$

**Preuve**

Remarquons que :

$$C(a, 1; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a, 1) \cdot x^n = \frac{a \cdot x \cdot \Omega(a+1, 1; x)}{\Omega(a, 1; x)}.$$

Ainsi

$$\left( \sum_{n \geq 0} C_{n+1}(a, 1) \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} (a)_n \cdot x^n \right) = a \cdot \left( \sum_{n \geq 0} (a+1)_n \cdot x^n \right).$$

Ce qui implique que pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(a, 1) + \sum_{p=1}^{n-1} C_p(a, 1) \cdot (a)_{n-p} = (a)_n.$$

En remplaçant  $a$  par 1 dans cette formule, on obtient le résultat du corollaire 9 précédent.

Remarquons que  $C_1(a, 1) = 1$  et que pour tout  $n \geq 1$  :  $[a^n](C_n(a, 1))$  est le nombre de permutations connexes de  $[n]$  qui ont  $r$  records. Soit  $k \in [n]$ , comme  $[a^k]((a)_n) = s_{n,k}$  et

$$[a^k] \left( C_n(a, 1) + \sum_{p=1}^{n-1} C_p(a, 1) \cdot (a)_{n-p} \right) = c(n, k) + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k c(p, i) \cdot s_{n-p,k-i},$$

alors pour tout  $n \geq 2$

$$c(n, k) + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k c(p, i) \cdot s_{n-p,k-i} = s_{n,k}.$$

Comme  $c(n, k) = c_{n,k}$  par le lemme 23 précédent, alors pour tout  $n \geq 2$  :

$$c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k c_{p,i} \cdot s_{n-p,k-i} = s_{n,k}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que cette formule peut s'écrire

$$c_{n,k} = s_{n,k} - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(k,p)} c_{p,i} \cdot s_{n-p,k-i}$$

car  $c_{p,i} = 0$  pour tout  $i \in \{0\} \cup \{\min(k,p) + 1, \dots, k\}$ .

□

Sillke dans ((Sillke, 1989), page 1) a donné la formule suivante :

$$x \frac{d}{dx} (\log (\Omega (a, b; x))) = \sum_{n \geq 1} G_n (a, b) x^n := G (a, b; x) \quad (6.22)$$

où  $G_n (a, b)$  est un polynôme en  $a$  et  $b$  comme variables tel que le coefficient de  $a^r b^s$  dans ce polynôme est égal au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $r$  cycles et  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $s$  cycles. Ce nombre, par la bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  ayant  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles.

**Proposition 36** *Les formule (6.13) et (6.22) précédentes de Dumont-Kreweras et de Sillke respectivement sont équivalentes*

Pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 24** *Pour tout  $n \geq 1$*

$$G_n (a, b) = C_{n+1} (a, b) .$$

On a :

$$\begin{aligned} C (a, b; x) &= x \cdot G (a, b; x) + ax, \\ \frac{d}{dx} (\Omega (a, b; x)) &= ab \Omega (a + 1, b + 1, x) . \end{aligned}$$

et

$$a \Omega (a + 1, b; x) - a \Omega (a, b; x) = abx \Omega (a + 1, b + 1; x) .$$

**Preuve**

En utilisant la bijection de Dress et Franz, on peut déduire directement que pour tout  $r$  et pour tout  $s$

$$[a^r b^s](G_n(a, b)) = [a^r b^s](C_{n+1}(a, b))$$

ce qui implique que pour tout  $n \geq 1$  :

$$G_n(a, b) = C_{n+1}(a, b).$$

Montrons que

$$C(a, b; x) = x \cdot G(a, b; x) + ax.$$

Comme  $C_1(a, b) = a$ , alors

$$\begin{aligned} x \cdot G(a, b; x) + ax &= x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n \right) + ax \\ &= x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} C_{n+1}(a, b) x^n \right) + ax \\ &= x \cdot \left( \sum_{n \geq 2} C_n(a, b) x^{n-1} \right) + ax \\ &= \left( \sum_{n \geq 2} C_n(a, b) x^n \right) + ax \\ &= \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n \\ &= C(a, b; x). \end{aligned}$$

Montrons que

$$\frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x)) = ab\Omega(a+1, b+1, x).$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\Omega(a, b; x)) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_{n+1} \cdot (b)_{n+1}}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab + \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_{n+1} \cdot (b)_{n+1}}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab + ab \sum_{n \geq 1} \frac{(a+1) \cdots (a+n) \cdot (b+1) \cdots (b+n)}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab + ab \sum_{n \geq 1} \frac{(a+1) \cdots ((a+1)+n-1) \cdot (b+1) \cdots ((b+1)+n-1)}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab + ab \sum_{n \geq 1} \frac{(a+1)_n \cdot (b+1)_n}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(a+1)_n \cdot (b+1)_n}{n!} \cdot x^n \right) \\
 &= ab \sum_{n \geq 0} \frac{(a+1)_n \cdot (b+1)_n}{n!} \cdot x^n \\
 &= ab \Omega(a+1, b+1, x).
 \end{aligned}$$

Montrons que

$$a\Omega(a+1, b; x) - a\Omega(a, b; x) = abx\Omega(a+1, b+1; x).$$

On a :

$$\begin{aligned}
 abx\Omega(a+1, b+1; x) + a\Omega(a, b; x) &= x \left( \frac{d}{dx} (\Omega(a, b; x)) \right) + a\Omega(a, b; x) \\
 &= x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \right) + a \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n \right) \\
 &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \cdot x^n \right) + \left( a \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n \right) + a \\
 &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \cdot x^n \cdot \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right) + a \\
 &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \cdot x^n \cdot \frac{(a+n)}{n} \right) + a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
abx\Omega(a+1, b+1; x) + a\Omega(a, b; x) &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(a)_{n+1} \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n \right) + a \\
&= a \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(a+1)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n \right) \\
&= a \sum_{n \geq 0} \frac{(a+1)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n \\
&= a\Omega(a+1, b; x).
\end{aligned}$$

Notons que cette formule est équivalente à la formule (6.17) donnée ci-dessus ((Dumont et Kreweras, 1988), page 28, formule (8)).

□

Maintenant, nous donnons la preuve de la proposition précédente :

### Preuve

Les formules (6.13) et (6.23) précédentes sont équivalentes. En effet,

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n = \frac{ax\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) &\Leftrightarrow x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n \right) + ax = \frac{ax\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = \frac{ax\Omega(a+1, b; x) - a\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = \frac{abx\Omega(a+1, b+1; x)}{\Omega(a, b; x)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = \frac{x \cdot \frac{d}{dx} (\Omega(a, b; x))}{\Omega(a, b; x)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = x \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, b; x))).
\end{aligned}$$

□

Remarquons que la formule (6.17) donnée ci-dessus est aussi équivalente aux formules (6.13) et (6.22) précédentes. En effet,

$$ax\Omega(a+1, b; x) - a\Omega(a, b; x) = abx^2\Omega(a+1, b+1; x)$$



implique que

$$\frac{ax\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} - ax = \frac{abx^2\Omega(a+1, b+1; x)}{\Omega(a, b; x)}.$$

Comme  $\sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n = \frac{ax\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)}$  et  $\frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x)) = ab\Omega(a+1, b+1; x)$ ,  
alors

$$\left( \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n \right) - ax = x^2 \cdot \frac{\frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x))}{\Omega(a, b; x)}.$$

Ainsi

$$x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n \right) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\log(\Omega(a, b; x)))$$

ce qui implique que

$$\sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = x \cdot \frac{d}{dx}(\log(\Omega(a, b; x))).$$

**Proposition 37** *Pour tout  $n \geq 1$  :*

$$\frac{1}{(n-1)!} \cdot (a)_n \cdot (b)_n = C_{n+1}(a, b) + \sum_{p=1}^{n-1} C_{p+1}(a, b) \cdot (a)_{n-p} \cdot (b)_{n-p}.$$

**Preuve**

Par la formule (6.22) de Sillke donnée ci-haut

$$x \cdot \frac{d}{dx}(\log(\Omega(a, b; x))) = \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n = \sum_{n \geq 1} C_{n+1}(a, b) \cdot x^n.$$

Ce qui implique que

$$x \cdot \frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x)) = \Omega(a, b; x) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} C_{n+1}(a, b) \cdot x^n \right).$$

Mais

$$x \cdot \frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x)) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \right) \cdot x^n$$

et

$$\Omega(a, b; x) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} C_{n+1}(a, b) \cdot x^n \right) = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{p=1}^n C_{p+1}(a, b) \cdot \frac{(a)_{n-p} \cdot (b)_{n-p}}{(n-p)!} \right) \cdot x^n.$$

Ainsi pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} &= \sum_{p=1}^n C_{p+1}(a, b) \cdot \frac{(a)_{n-p} \cdot (b)_{n-p}}{(n-p)!} \\ &= C_{n+1}(a, b) + \sum_{p=1}^{n-1} C_{p+1}(a, b) \cdot \frac{(a)_{n-p} \cdot (b)_{n-p}}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

□

En utilisant le résultat de cette proposition, on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 11** Pour tout  $n \geq 1$  :

$$n \cdot n! = h_{n+1} + \sum_{p=1}^{n-1} h_{p+1} \cdot (n-p)!$$

et

$$n \cdot s_{n,k} = c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p+1)} c_{p+1,j} \cdot s_{n-p,k-j}.$$

### Preuve

En utilisant la proposition précédente et en remplaçant chacune des variables  $a$  et  $b$  par 1 et en utilisant le fait que pour tout  $n \geq 0$  :  $(1)_n = n!$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $C_n(1, 1) = h_n$ , on obtient la formule suivante :

pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{(1)_n \cdot (1)_n}{(n-1)!} = C_{n+1}(1, 1) + \sum_{p=1}^{n-1} C_{p+1}(1, 1) \cdot \frac{(1)_{n-p} \cdot (1)_{n-p}}{(n-p)!}.$$

Ainsi pour tout  $n \geq 1$  :

$$n \cdot n! = h_{n+1} + \sum_{p=1}^{n-1} h_{p+1} \cdot (n-p)!.$$

Dans le cas particulier  $b = 1$ , on obtient que le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $\frac{(a)_n \cdot (1)_n}{(n-1)!}$  est  $n \cdot s_{n,k}$  et le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $C_{n+1}(a, 1) + \sum_{p=1}^{n-1} C_{p+1}(a, 1) \cdot$

$\frac{(a)_{n-p} \cdot (1)_{n-p}}{(n-p)!}$  est  $c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k c_{p+1,i} \cdot s_{n-p,k-i}$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$  :

$$n \cdot s_{n,k} = c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k c_{p+1,i} \cdot s_{n-p,k-i}.$$

Cette formule peut s'écrire

$$n \cdot s_{n,k} = c_{n+1,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min(k,p+1)} c_{p+1,i} \cdot s_{n-p,k-i}.$$

□

Le résultat de la proposition suivante est une formule plus générale que la formule donnée au corollaire 8, donné ci-dessus, qu'on peut obtenir en remplaçant  $a$  par 1 et  $b$  par 1.

### Proposition 38

$$\frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) = \frac{d}{dx} (\log(F(a, b; x))).$$

### Preuve

Dumont et Kreweras ont montré dans ((Dumont et Kreweras, 1988), page 28, formule (5)) que :

$$\Omega(a, b; x) = \Omega(a, b-1; x) + ax\Omega(a+1, b; x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (C(a, b; x)) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{ax\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\Omega(a, b-1; x) + ax\Omega(a+1, b; x) - \Omega(a, b-1; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\Omega(a, b; x) - \Omega(a, b-1; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{\Omega(a, b-1; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( - \left( \frac{\Omega(a, b-1; x)}{\Omega(a, b; x)} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(C(a, b; x)) &= \frac{d}{dx} \left( - \left( \frac{1}{F(a, b; x)} \right) \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(F(a, b; x))}{(F(a, b; x))^2} \\
&= \frac{1}{F(a, b; x)} \cdot \frac{d}{dx}(\log(F(a, b; x))).
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le fait que

$$F(a, b; x) - 1 = F(a, b; x) \cdot C(a, b; x)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{F(a, b; x)} = 1 - C(a, b; x).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\log(F(a, b; x))) &= \frac{\frac{d}{dx}(F(a, b; x))}{F(a, b; x)} \\
&= \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) \cdot (1 - C(a, b; x)) \\
&= \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) - \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) \cdot C(a, b; x) \\
&= \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) - \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) \cdot C(a, b; x) - \\
&\quad \frac{d}{dx}(C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) + \frac{d}{dx}(C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) \\
&= \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) - \frac{d}{dx}(F(a, b; x) \cdot C(a, b; x)) + \frac{d}{dx}(C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) \\
&= \frac{d}{dx}(F(a, b; x)) - \frac{d}{dx}(F(a, b; x) - 1) + \frac{d}{dx}(C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) \\
&= \frac{d}{dx}(C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x).
\end{aligned}$$

□

De cette proposition on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 12** Pour tout  $n \geq 1$

$$n \cdot n! = n \cdot h_n + \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} i! \cdot (n-p-i)! \right)$$

et

$$n \cdot s_{n,k} = n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{t=0}^{\min(k-j,i)} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right).$$

### Preuve

Remarquons que

$$\frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) = \frac{d}{dx} (\log(F(a, b; x)))$$

implique que

$$\frac{d}{dx} (F(a, b; x)) = \frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot (F(a, b; x))^2.$$

Ainsi

$$\sum_{n \geq 1} n F_n(a, b) x^{n-1} = \left( \sum_{n \geq 1} n C_n(a, b) x^{n-1} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) x^n \right)^2.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1) F_{n+1}(a, b) x^n &= \left( \sum_{n \geq 0} (n+1) C_{n+1}(a, b) x^n \right) \\ &\quad \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{p=0}^n F_p(a, b) \cdot F_{n-p}(a, b) \right) x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{p=0}^n (p+1) C_{p+1}(a, b) \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} F_i(a, b) \cdot F_{n-p-i}(a, b) \right) \right) x^n. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} (n+1) F_{n+1}(a, b) &= \sum_{p=0}^n (p+1) C_{p+1}(a, b) \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} F_i(a, b) \cdot F_{n-p-i}(a, b) \right) \\ &= \left( \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) C_{p+1}(a, b) \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} F_i(a, b) \cdot F_{n-p-i}(a, b) \right) \right) \\ &\quad + (n+1) C_{n+1}(a, b) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$n F_n(a, b) = n C_n(a, b) + \sum_{p=1}^{n-1} p C_p(a, b) \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} F_i(a, b) \cdot F_{n-p-i}(a, b) \right).$$

En remplaçant chacune des variables  $a$  et  $b$  par 1 et en utilisant le fait que pour tout  $n \geq 0 : F_n(1, 1) = n!$  et pour tout  $n \geq 1 : C_n(1, 1) = h_n$ , on obtient :

$$n \cdot n! = n \cdot h_n + \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} i! \cdot (n-p-i)! \right). \quad (6.23)$$

Dans le cas particulier  $b = 1$ , on obtient que le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $nF_n(a, 1)$  est  $n \cdot s_{n,k}$  et le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $nC_n(a, 1) + \sum_{p=1}^{n-1} pC_p(a, 1) \cdot$

$$\left( \sum_{i=0}^{n-p} F_i(a, 1) \cdot F_{n-p-i}(a, 1) \right) \text{ est } n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{t=0}^{k-j} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right).$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$n \cdot s_{n,k} = n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{t=0}^{k-j} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que cette formule peut s'écrire :

$$n \cdot s_{n,k} = n \cdot c_{n,k} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p} \sum_{t=0}^{\min(k-j,i)} s_{i,t} \cdot s_{n-p-i,k-j-t} \right).$$

□

La formule (6.23) précédente est identique à la formule (6.8) donnée au théorème 17 précédent.

**Proposition 39** Pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(a, b) - C_n(a, b-1) = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot C_p(a, b) \cdot F_{n-1-p}(a, b).$$

**Preuve**

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) &= \frac{d}{dx} (\log(F(a, b; x))) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \log \left( \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b-1; x)} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, b; x))) - \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, b-1; x))) \\ &= \frac{1}{x} \cdot G(a, b; x) - \frac{1}{x} \cdot G(a, b-1; x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) &= G(a, b; x) - G(a, b-1; x) \\ &= \left( \frac{1}{x} \cdot C(a, b; x) - a \right) - \left( \frac{1}{x} \cdot C(a, b-1; x) - a \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$x^2 \cdot \frac{d}{dx} (C(a, b; x)) \cdot F(a, b; x) = C(a, b; x) - C(a, b-1; x).$$

On a :

$$x^2 \cdot \left( \sum_{n \geq 1} n C_n(a, b) x^{n-1} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) x^n \right) = \left( \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n \right) - \left( \sum_{n \geq 1} C_n(a, b-1) x^n \right)$$

ce qui implique que

$$x \cdot \left( \sum_{n \geq 0} n C_n(a, b) x \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) x^n \right) = \sum_{n \geq 1} (C_n(a, b) - C_n(a, b-1)) \cdot x^n$$

c'est-à-dire

$$x \cdot \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{p=0}^n p C_p(a, b) F_{n-p}(a, b) \right) x^n = \sum_{n \geq 1} (C_n(a, b) - C_n(a, b-1)) \cdot x^n.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\sum_{n \geq 1} \left( \sum_{p=1}^n p C_p(a, b) F_{n-p}(a, b) \right) x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} (C_n(a, b) - C_n(a, b-1)) \cdot x^n.$$

Comme  $C_1(a, b) - C_1(a, b-1) = a - a = 0$ , alors on peut déduire que :

$$\sum_{n \geq 2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} p C_p(a, b) F_{n-1-p}(a, b) \right) x^n = \sum_{n \geq 2} (C_n(a, b) - C_n(a, b-1)) \cdot x^n.$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(a, b) - C_n(a, b-1) = \sum_{p=1}^{n-1} p C_p(a, b) F_{n-1-p}(a, b).$$

□

Maintenant, on peut donner le corollaire suivant dont le résultat est une formule qui a été donnée dans ((Cori, 2008), proposition 2, page 7).

**Corollaire 13** Pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$h_n = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot (n-1-p)!$$

et

$$c_{n,k} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i}.$$

**Preuve :**

En utilisant la proposition précédente et en remplaçant chacune des variables  $a$  et  $b$  par 1 et en utilisant le fait que pour tout  $n \geq 0$  :  $F_n(1,1) = n!$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $C_n(1,1) = h_n$  et  $C_n(1,0) = 0$ , on obtient la formule suivante :

pour tout  $n \geq 2$  :

$$C_n(1,1) - C_n(1,0) = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot C_p(1,1) \cdot F_{n-1-p}(1,1).$$

Ainsi pour tout  $n \geq 2$  :

$$h_n = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot h_p \cdot (n-1-p)!.$$

Dans le cas particulier  $b = 1$ , on obtient que le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $C_n(a,1) - C_n(a,0)$  est  $c_{n,k}$  et le coefficient de  $a^k$  dans le polynôme  $\sum_{p=1}^{n-1} p C_p(a,1) F_{n-1-p}(a,1)$  est  $\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i}$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq 2$  :

$$c_{n,k} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i}.$$

Cette formule peut s'écrire

$$c_{n,k} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(k,p)} p \cdot c_{p,i} \cdot s_{n-1-p,k-i}.$$

□



On peut montrer la première formule donnée au corollaire 13 précédent comme suit :

Remarquons que

$$C(x) = \sum_{n \geq 1} h_n \cdot x^n = x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} h_{n+1} \cdot x^n \right) + x$$

ce qui implique que

$$\sum_{n \geq 1} h_{n+1} \cdot x^n = \frac{C(x) - x}{x}.$$

En remplaçant  $a$  par 1 et  $b$  par 1 dans la formule (6.22) donnée ci-dessus, on obtient

$$x \frac{d}{dx} (\log (\Omega (1, 1; x))) = \sum_{n \geq 1} G_n (1, 1) x^n.$$

Mais  $\Omega (1, 1; x) = \Omega (x)$  et

$$\sum_{n \geq 1} G_n (1, 1) x^n = \sum_{n \geq 1} C_{n+1} (1, 1) x^n = \sum_{n \geq 1} h_{n+1} x^n = \frac{C(x) - x}{x}.$$

Ainsi

$$x \frac{d}{dx} (\log (\Omega (x))) = \frac{C(x) - x}{x}$$

ce qui implique que

$$x \cdot \frac{d}{dx} (\Omega (x)) = \Omega (x) \cdot \left( \frac{C(x) - x}{x} \right),$$

En utilisant la formule donnée au corollaire 8 précédent, on peut déduire que

$$\Omega (x) \cdot \left( \frac{C(x) - x}{x} \right) = x \cdot \frac{d}{dx} (\Omega (x)) = x \cdot \left( (\Omega (x))^2 \cdot \frac{d}{dx} (C(x)) \right)$$

ce qui implique que

$$\frac{C(x) - x}{x} = x \cdot \Omega (x) \cdot \frac{d}{dx} (C(x)).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} h_{n+1} x^n &= x \cdot \left( \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} n \cdot h_n \cdot x^{n-1} \right) \\
&= \left( \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} n \cdot h_n \cdot x^n \right) \\
&= \left( \sum_{n \geq 0} n! \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} n \cdot h_n \cdot x^n \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n k \cdot h_k \cdot (n-k)! \right) \cdot x^n \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n k \cdot h_k \cdot (n-k)! \right) \cdot x^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$

$$h_{n+1} = \sum_{k=1}^n k \cdot h_k \cdot (n-k)!.$$

Et donc pour tout  $n \geq 2$

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot h_k \cdot (n-1-k)!.$$

Dumont et Kreweras ont montré dans la formule (6.18) donnée ci-haut que

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} C_n(a, b) x^n &= bx \sum_{n \geq 1} F_n(a, b+1) x^n \\
&= \sum_{n \geq 1} b F_n(a, b+1) x^{n+1} \\
&= \sum_{n \geq 2} b F_{n-1}(a, b+1) x^n
\end{aligned}$$

Ce qui implique que pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned}
C_n(a, b) &= b F_{n-1}(a, b+1) \\
&= b \sum_{i,j} s_{n-1,i,j} a^i (b+1)^j \\
&= b \sum_{i,j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} s_{n-1,i,j} a^i b^k
\end{aligned}$$

où  $1 \leq i \leq n$  et  $i + j \leq n$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
 c_{n,r,s} &= [a^r b^s] (C_n(a, b)) \\
 &= [a^r b^{s-1}] (F_{n-1}(a, b+1)) \\
 &= [a^r b^{s-1}] \left( \sum_{i,j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} s_{n-1,i,j} a^i b^k \right) \\
 &= \sum_{j \geq s-1} \binom{j}{s-1} s_{n-1,r,j} \\
 &= \sum_{j=s-1}^{n-1} \binom{j}{s-1} s_{n-1,r,j}
 \end{aligned}$$

où  $c_{n,r,s}$  dénote le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records. Cette formule a été déjà donné par Dumont et Kreweras (Dumont et Kreweras, 1988, page 30).

En remplaçant chacune des variables  $a$  et  $b$  par 1 et en utilisant le fait que pour tout  $n \geq 1$  :  $C_n(1, 1) = h_n$ , on obtient la formule suivante :

$$h_n = F_{n-1}(1, 2) \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
 h_n &= \sum_{k=0}^{n-2} \text{a-re-ex-}(n-1, k) \cdot 2^k \\
 &= \text{a-re-ex-}(n-1, 0) + \sum_{k=1}^{n-2} \text{a-re-ex-}(n-1, k) \cdot 2^k
 \end{aligned}$$

où  $\text{a-re-ex-}(n, k)$  dénote le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $k$  anti-records exclusifs.

Remarquons que  $\text{a-re-ex-}(n-1, 0) = 1$  car la seule permutation dans  $\mathcal{S}_{n-1}$  qui n'a pas d'anti-record exclusif c'est-à-dire tous ses anti-records sont des records est l'identité  $Id = 12 \dots (n-1)$ . Ainsi par cette formule, il est clair que pour tout  $n \geq 1$ , le nombre  $h_n$  des permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  est impair.

En remplaçant la variable  $b$  par 1 et en utilisant le fait que pour tout  $n \geq 2$  :  $[a^k] (C_n(a, 1)) =$

$c(n, k) = c_{n,k}$ , on obtient la formule suivante :

$$c_{n,k} = \left[ a^k \right] (F_{n-1}(a, 2)).$$

Ainsi

$$c_{n,k} = \sum_{p=0}^{n-1} s(n, k, p) \cdot 2^p$$

où  $s_{n,k,p}$  dénote le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $k$  records et  $p$  anti-records exclusifs.

## 6.4 Généralisation d'un résultat de Sillke

Sillke dans ((Sillke, 1989), page 1) a donné la formule suivante :

$$x \frac{d}{dx} (\log (\Omega(a, b; x))) = G(a, b; x) \quad (6.24)$$

où

$$G(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} G_n(a, b) x^n.$$

Pour tout  $n \geq 1$  :  $G_n(a, b)$  est un polynôme tel que le coefficient de  $a^r b^s$  dans ce polynôme est égal au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $r$  cycles et  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $s$  cycles. Ce nombre, par la bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  ayant  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $r$  cycles et  $\beta$  a  $s$  cycles.

Soit

$$\Omega(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n,$$

où  $(a_1, a_2, \dots)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a_1, a_2, \dots)_n := \sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots$  tel que  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  est le type cyclique de la permutation  $\sigma$ .

Soit

$$G(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x) := \sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n,$$

où  $G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$  est un polynôme tel que le coefficient de  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  dans ce polynôme est égal au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots)$  et que  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de type cyclique  $(m_1, m_2, \dots)$ . Ce nombre, par la bijection de Dress et Franz, est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles le type cyclique de  $\alpha$  est  $(n_1, n_2, \dots)$  et le type cyclique de  $\beta$  est  $(m_1, m_2, \dots)$ .

Le résultat du théorème suivant généralise le résultat (6.24) précédent.

**Théorème 18** *On a :*

$$x \cdot \frac{d}{dx} \log(\Omega(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x)) = G(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x). \quad (6.25)$$

Dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ , la formule (6.25) devient la formule (6.24) donnée ci-dessus qui est équivalente à la formule (6.13) précédente.

Nous allons utiliser la proposition suivante pour montrer le théorème précédent.

**Proposition 40** *Pour tout  $n \geq 1$  :*

$$G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_n} w(\alpha, \beta).$$

### Preuve

La preuve du résultat de cette proposition est directe à partir de la bijection de Dress et Franz entre les hypercartes pointées de  $\mathfrak{C}_n$  et les sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ .

En effet, le coefficient de  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  dans le polynôme  $\sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_n} w(\alpha, \beta)$  est égal au nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathfrak{C}_n$  telles que  $\alpha$  est de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots)$  et  $\beta$  est de type cyclique  $(m_1, m_2, \dots)$ . Ce coefficient est égal, par la bijection de Dress et Franz, au nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots)$  et que  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  est de

type cylique  $(m_1, m_2, \dots)$  qui est le coefficient de  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  dans le polynôme  $G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$ .

□

Maintenant, nous donnons la preuve du théorème précédent.

### Preuve

Dans toute la suite de cette preuve, on pose  $\Omega(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x) = \Omega$  et  $G(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x) = G$ .

Montrons que  $x \cdot \frac{d}{dx}(\log(\Omega)) = G$ , c'est-à-dire que  $x \cdot \frac{d}{dx}(\Omega) = G \cdot \Omega$ .

En effet, comme

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dx}(\Omega) = \sum_{n \geq 1} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}.$$

Ce qui implique que

$$x \cdot \frac{d}{dx}(\Omega) = \sum_{n \geq 1} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{(n-1)!} \cdot x^n.$$

En posant  $G_0(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}\Omega \cdot G &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n \right) \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \left( \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k}}{(n-k)!} \right) \right] \cdot x^n \\ &\quad \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{k=1}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \left( \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k}}{(n-k)!} \right) \right] \cdot x^n\end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \left( \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

c'est-à-dire, il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n = \sum_{k=1}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!}.$$

En effet, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n &= \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot \left( \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} b_1^{\tau_1} b_2^{\tau_2} \dots \right) \\ &= \sum_{(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n} (a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots) \cdot (b_1^{\tau_1} b_2^{\tau_2} \dots), \end{aligned}$$

où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\sigma$  et  $(\tau_1, \tau_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\tau$ .

Or à chaque couple  $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$  correspond un sous-ensemble unique  $A$  de  $[n]$  contenant 1, tel que les restrictions  $\sigma' = \sigma_A$  et  $\tau' = \tau_A$  sont deux permutations de l'ensemble  $A$  telles que le sous-groupe engendré par  $\sigma_A$  et  $\tau_A$  dans le groupe  $\mathcal{S}_A$  de toutes les permutations de  $A$  agit transitivement sur  $A$ , c'est-à-dire que  $(\sigma_A, \tau_A)$  est une hypercarte étiquetée. Les autres restrictions  $\sigma'' = \sigma_{[n]-A}$  et  $\tau'' = \tau_{[n]-A}$  sont des permutations quelconques de  $[n] \setminus A$ . Comme

$$\begin{aligned} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots &= a_1^{\sigma'_1 + \sigma''_1} a_2^{\sigma'_2 + \sigma''_2} \dots \\ &= (a_1^{\sigma'_1} a_2^{\sigma'_2} \dots) \cdot (a_1^{\sigma''_1} a_2^{\sigma''_2} \dots), \end{aligned}$$

où  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\sigma'$  et  $(\sigma''_1, \sigma''_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\sigma''$ , et

$$\begin{aligned} b_1^{\tau_1} b_2^{\tau_2} \dots &= b_1^{\tau'_1 + \tau''_1} b_2^{\tau'_2 + \tau''_2} \dots \\ &= (b_1^{\tau'_1} b_2^{\tau'_2} \dots) \cdot (b_1^{\tau''_1} b_2^{\tau''_2} \dots) \end{aligned}$$

où  $(\tau'_1, \tau'_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\tau'$  et  $(\tau''_1, \tau''_2, \dots)$  est le type cyclique de  $\tau''$ , on peut écrire la sommation précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n &= \sum_{k=1}^n \sum_A \left( \sum_{(\sigma', \tau') \in \mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_k} (a_1^{\sigma'_1} a_2^{\sigma'_2} \dots) \cdot (b_1^{\tau'_1} b_2^{\tau'_2} \dots) \right) \cdot \\ &\quad \left( \sum_{(\sigma'', \tau'') \in \mathcal{S}_{n-k} \times \mathcal{S}_{n-k}} (a_1^{\sigma''_1} a_2^{\sigma''_2} \dots) \cdot (b_1^{\tau''_1} b_2^{\tau''_2} \dots) \right), \end{aligned}$$

où  $A$  est de cardinal  $k$  et contenant 1. On en tire immédiatement,

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left( \sum_{(\sigma', \tau') \in \mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_k} \left( a_1^{\sigma'_1} a_2^{\sigma'_2} \dots \right) \left( b_1^{\tau'_1} b_2^{\tau'_2} \dots \right) \right) \\
 &\quad \left( \sum_{(\sigma'', \tau'') \in \mathcal{S}_{n-k} \times \mathcal{S}_{n-k}} \left( a_1^{\sigma''_1} a_2^{\sigma''_2} \dots \right) \left( b_1^{\tau''_1} b_2^{\tau''_2} \dots \right) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left( \sum_{(\sigma', \tau') \in \mathcal{H}_k} \left( a_1^{\sigma'_1} a_2^{\sigma'_2} \dots \right) \cdot \left( b_1^{\tau'_1} b_2^{\tau'_2} \dots \right) \right) \cdot (a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\sigma', \tau') \in \mathcal{H}_k} w(\sigma', \tau') \right) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!}
 \end{aligned}$$

Par la proposition 32 précédente,

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}_k} w(\alpha, \beta) = (k-1)! \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_k} w(\alpha, \beta),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\sigma', \tau') \in \mathcal{H}_k} w(\sigma', \tau') \right) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n (k-1)! \left( \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_k} w(\alpha, \beta) \right) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_k} w(\alpha, \beta) \right) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!}.
 \end{aligned}$$

Par la proposition 40 précédente, on obtient

$$(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n = \sum_{k=1}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!}$$

ce qu'il fallait montrer.

□

De ce théorème on peut déduire le corollaire suivant :



**Corollaire 14** Pour tout  $n \geq 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_{1,1,1} = 1 \text{ et } \mathfrak{h}_{1,r,s} = 0 \text{ pour tout } (r,s) \neq (1,1) \\ \text{et} \\ \mathfrak{h}_{n,r,s} = s_{n,r} \cdot s_{n,s} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \binom{n-1}{k-1} \cdot \mathfrak{h}_{k,i,j} \cdot s_{n-k,r-i} \cdot s_{n-k,s-j}. \end{array} \right.$$

où  $\mathfrak{h}_{n,r,s}$  dénote le nombre d'hypercartes étiquetées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que le nombre de cycles de  $\alpha$  est  $r$  et le nombre de cycles de  $\beta$  est  $s$ .

Le résultat de ce corollaire généralise le résultat donné par R. Cori (Cori, 2009, lemme 1).

### Preuve

Par le théorème précédent, on peut déduire que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n &= \sum_{k=1}^n G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \\ &= G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot (n-1)! + \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot (a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n - \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} G_k(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ , on obtient

$$G_n(a; b) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (a)_n \cdot (b)_n - \sum_{k=1}^{n-1} G_k(a; b) \cdot \frac{(a)_{n-k} \cdot (b)_{n-k}}{(n-k)!} \text{ avec } G_1(a; b) = ab.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} [a^s b^t] G_n(a; b) &= [a^s b^t] \left( \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \right) - \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s_1+s_2=s \text{ et } t_1+t_2=t} [a^{s_1} b^{t_1}] (G_k(a; b)) \cdot [a^{s_2} b^{t_2}] \left( \frac{(a)_{n-k} \cdot (b)_{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

$$[a^s b^t] G_n(a; b) = [a^s b^t] \left( \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(n-1)!} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s_1=0}^s \sum_{t_1=0}^t [a^{s_1} b^{t_1}] (C_k(a; b)) \cdot [a^{s-s_1} b^{t-t_1}] \left( \frac{(a)_{n-k} \cdot (b)_{n-k}}{(n-k)!} \right).$$

Mais

$$[a^s b^t] ((a)_n \cdot (b)_n) = s_{n,s} \cdot s_{n,t} \text{ et } [a^s b^t] (G_n(a; b)) = g_{n,s,t}$$

où  $g_{n,s,t}$  est le nombre de sous-groupes  $H$  de  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  d'indice  $n$  tel que  $x_1$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $s$  cycles et  $x_2$  agissant sur  $\mathcal{F}_2/H$  a  $t$  cycles. Par la bijection de Dress et Franz  $g_{n,s,t}$  est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $s$  cycles et  $\beta$  a  $t$  cycles. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{1,1,1} = 1 \text{ et } g_{1,s,t} = 0 \text{ pour tout } (s,t) \neq (1,1) \\ \text{et} \\ g_{n,s,t} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot s_{n,s} \cdot s_{n,t} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s_1=0}^s \sum_{t_1=0}^t g_{k,s_1,t_1} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot s_{n-k,s-s_1} \cdot s_{n-k,t-t_1}. \end{array} \right.$$

Comme  $g_{n,s,t} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \mathfrak{h}_{n,s,t}$  où  $\mathfrak{h}_{n,s,t}$  dénote le nombre d'hypercartes étiquetées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\alpha$  a  $s$  cycles et  $\beta$  a  $t$  cycles, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_{1,1,1} = 1 \text{ et } \mathfrak{h}_{1,s,t} = 0 \text{ pour tout } (s,t) \neq (1,1) \\ \text{et} \\ \mathfrak{h}_{n,s,t} = s_{n,s} \cdot s_{n,t} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s_1=0}^s \sum_{t_1=0}^t \binom{n-1}{k-1} \cdot \mathfrak{h}_{k,s_1,t_1} \cdot s_{n-k,s-s_1} \cdot s_{n-k,t-t_1}. \end{array} \right.$$

□

Par la bijection de Sillke  $g_{n,s,t} = c(n, s, t)$  où  $c(n, s, t)$  dénote le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $s$  records et  $t$  anti-records. Ainsi la formule donnée ci-haut peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} c(1, 1, 1) = 1 \text{ et } c(1, s, t) = 0 \text{ pour tout } (s, t) \neq (1, 1) \\ \text{et} \\ c(n, s, t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot s_{n,s} \cdot s_{n,t} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s_1=0}^s \sum_{t_1=0}^t c(k, s_1, t_1) \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot s_{n-k,s-s_1} \cdot s_{n-k,t-t_1}. \end{array} \right.$$

Dans la preuve du théorème précédent, on a montré que :

$$(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_k} w(\alpha, \beta) \right) \cdot \frac{(a_1, a_2, \dots)_{n-k} \cdot (b_1, b_2, \dots)_{n-k} \cdot (n-1)!}{(n-k)!}. \quad (6.26)$$

Cette formule (6.26) généralise le résultat donné par Cori dans (Cori, 2009, lemme 1).

En effet, en posant  $a_1 = a_2 = \dots = 1$  et  $b_1 = b_2 = \dots = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} n! \cdot n! &= \sum_{k=1}^n |\mathfrak{C}_k| \cdot \frac{(n-k)! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{|\mathcal{H}_k|}{(k-1)!} \cdot \frac{(n-k)! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{((n-1) - (k-1))! \cdot (k-1)!} \cdot |\mathcal{H}_k| \cdot (n-k)! \cdot (n-k)! \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \cdot |\mathcal{H}_k| \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!. \end{aligned}$$

Comme  $|\mathfrak{C}_k| = h_{k+1}$  par la bijection de Sillke, alors

$$\begin{aligned} n! \cdot n! &= \sum_{k=1}^n \frac{|\mathcal{H}_k|}{(k-1)!} \cdot \frac{(n-k)! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n |\mathfrak{C}_k| \cdot \frac{(n-k)! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n h_{k+1} \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!. \end{aligned}$$

Ce qui implique que pour tout  $n \geq 1$  :

$$n \cdot n! = \sum_{k=1}^n h_{k+1} \cdot (n-k)!.$$

Cette formule découle de la formule connue suivante :

$$n! = \sum_{k=1}^n h_k \cdot (n-k)! \text{ pour tout } n \geq 1.$$

En effet, cette dernière formule peut s'écrire

$$n! = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k+1} \cdot (n-k-1)! \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi pour tout  $n \geq 0$  :

$$(n+1)! = \sum_{k=0}^n h_{k+1} \cdot (n-k)!.$$

Ce qui implique que :

$$(n+1) \cdot n! = \sum_{k=0}^n h_{k+1} \cdot (n-k)!.$$

Cette dernière formule est équivalente à :

$$n \cdot n! = \left( \sum_{k=0}^n h_{k+1} \cdot (n-k)! \right) - n! = \sum_{k=1}^n h_{k+1} \cdot (n-k)!.$$

## 6.5 Généralisation d'un résultat de Dumont et Kreweras

D. Dumont et G. Kreweras ont étudié une famille particulière de fractions continues liée à la série hypergéométrique

$$\Omega(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n!} \cdot x^n,$$

où  $(a)_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :  $(a)_n := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a^{\text{cyc}(\sigma)}$  tel que  $\text{cyc}(\sigma)$  est le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$  (Dumont et Kreweras, 1988). Plus précisément, ils ont considéré deux ensembles de polynômes  $F_n(a, b)$  et  $C_n(a, b)$  tels que :

$$F(a, b; x) := \sum_{n \geq 0} F_n(a, b) x^n = \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b-1; x)}$$

et

$$C(a, b; x) := \sum_{n \geq 1} C_n(a, b) x^n = ax \frac{\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)}$$

où  $F_0(a, b) = 1$  et  $C_1(a, b) = a$ . Ils ont donné une signification énumérative aux coefficients de ces polynômes qui sont des entiers non-négatifs. Ils ont établi que pour tout  $n \geq 1$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans  $F_n(a, b)$  est le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont  $r$  records et  $s$  anti-records exclusifs et pour tout  $n \geq 2$ , le coefficient de  $a^r b^s$  dans  $C_n(a, b)$  a la même signification pour les permutations connexes de  $[n]$ . Notons que tous les anti-records d'une permutation connexe de l'ensemble  $[n]$  tel que  $n \geq 2$  sont exclusifs. Ils ont montré le résultat suivant :

$$F(a, b; x) = 1 + F(a, b; x) \cdot C(a, b; x).$$

Dans cette section, nous allons généraliser ce résultat de Dumont et Kreweras.

Pour  $n \geq 0$ , on peut identifier chaque permutation de l'ensemble  $[n]$  d'une manière unique à une liste ordonnée non vide de permutations connexes. Par exemple pour  $\sigma = 216354978$  une permutation non connexe de l'ensemble  $[9]$ . Le plus petit  $i$  pour lequel  $\sigma([i]) = [i]$  est  $i = 2$ . Ainsi, on peut écrire  $\sigma = 21 \mid 6354978$ . On peut identifier  $6354978$  qui est une permutation de l'ensemble  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  à une permutation de l'ensemble  $[7]$  en soustrayant 2 à chaque élément, ce qui donne la permutation  $4132756$ . En procédant à chaque fois de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma &= 21 \mid 6354978 \\ &= 21 \mid 4132756 \\ &= 21 \mid 4132 \mid 756 \\ &= 21 \mid 4132 \mid 312.\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons associer à chaque permutation connexe de l'ensemble  $[n]$  où  $n \geq 2$  un poids qu'on note par  $w(\sigma)$  comme suit :

$$w(\sigma) = w(\alpha, \beta)$$

où  $(\alpha, \beta)$  est l'hypercarte pointée à  $n - 1$  points associée à la permutation  $\sigma$  par la bijection de Sillke. Remarquons que dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = 1$  et  $b_1 = b_2 = \dots = 1$ ,

$$w(\sigma) = a^{\text{cyc}(\alpha)} \cdot b^{\text{cyc}(\beta)} = a^r \cdot b^s$$

où  $r$  est le nombre de records de  $\sigma$  et  $s$  est le nombre d'anti-records de  $\sigma$ . Pour  $\sigma = 1$ , la seule permutation connexe de l'ensemble  $[1]$ , on pose  $w(\sigma) = a_1$ . Par exemple, pour  $\sigma = 527163984$  une permutation connexe de l'ensemble  $[9]$ ,

$$w(\sigma) = a_2^2 a_4 b_1 b_2 b_5.$$

En effet, par la bijection de Sillke, on peut associer à  $\sigma$  une hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à 8 points où  $\alpha = (52)(7163)(84)$  et  $\beta = (12)(3)(45678)$ . Ce qui correspond au fait que

$\alpha$  a deux cycles de longueur 2 et un cycle de longueur 4 et au fait que  $\beta$  a un cycle de longueur 1, un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 5.

Soient, pour tout  $n \geq 1$

$$C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) := \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} w(\sigma)$$

et

$$\begin{aligned} C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &: = \sum_{n \geq 1} C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\ &= a_1 x + a_1 b_1 x^2 + (a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2 + a_2 b_2) x^3 + \dots \\ &\quad + (\dots + a_2^2 a_4 b_1 b_2 b_5 + \dots) x^9 + \dots \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$C_{n+1}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots).$$

En effet,

$$G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_n} w(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}} w(\sigma) = C_{n+1}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots).$$

On peut remarquer aussi que

$$C_n(a, a, \dots; b, b, \dots) = C_n(a, b) \text{ et } C(a, a, \dots; b, b, \dots; x) = C(a, b; x).$$

Pour  $\sigma$  une permutation non connexe de l'ensemble  $[n]$ , on peut écrire  $\sigma$  comme une liste ordonnée de permutations connexes. Ainsi on définit  $w(\sigma)$  le poids de  $\sigma$  comme le produit des poids des permutations connexes de cette liste.

Remarquons que le nombre d'anti-records non exclusifs de  $\sigma$  est égal au nombre de termes, dans la liste ordonnée de permutations connexes associée à  $\sigma$ , qui sont égales à 1 qui est la seule permutation connexe de l'ensemble  $[1]$ . Par exemple, la permutation non connexe  $\sigma = 213645798$  de l'ensemble  $[9]$  a deux anti-records non exclusifs qui sont 3 et 7 et on a :  $\sigma = 21|1|312|1|21$  et dans cette liste ordonnée le terme 1 a apparu deux fois.

Comme  $w(1) = a_1$  alors dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ ,

$$w(\sigma) = a^r b^s$$

où  $r$  est le nombre de records de  $\sigma$  et  $s$  est le nombre d'anti-records exclusifs de  $\sigma$  car dans le poids  $w(\sigma)$  associé à  $\sigma$  chaque anti-record non exclusif est compté comme record et non comme anti-record. Par exemple pour la permutation non connexe  $\sigma = 213645798$  donnée ci-haut, on a :

$$\begin{aligned} w(213645798) &= w(21) w(1) w(312) w(1) w(21) \\ &= (a_1 b_1) (a_1) (a_2 b_1^2) (a_1) (a_1 b_1) \\ &= a_1^4 a_2 b_1^4. \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ ,

$$w(213645798) = a^5 b^4,$$

ce qui correspond exactement au fait que  $\sigma$  a 5 records qui sont 2, 3, 6, 7 et 9 et quatre anti-records exclusifs qui sont 1, 4, 5, 8. Remarquons que la permutation non connexe  $\sigma = 213645798$  a 6 anti-records, quatre exclusifs et deux non exclusifs.

Soient  $F_0(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = 1$  et pour tout  $n \geq 1$  :

$$F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} w(\sigma).$$

Soit

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &:= \sum_{n \geq 0} F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\ &= 1 + a_1 x + (a_1^2 + a_1 b_1) x^2 + (a_1^3 + 2a_1^2 b_1 + a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2 + a_2 b_2) x^3 + \dots \\ &\quad + (\dots + a_1 a_2 a_3 b_1^2 b_2^3 + a_2^2 a_4 b_1 b_2 b_5 + \dots) x^9 + \dots \end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$F_n(a, a, \dots; b, b, \dots) = F_n(a, b) \text{ et } F(a, a, \dots; b, b, \dots; x) = F(a, b; x).$$

**Proposition 41** *On a :*

$$F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = 1 + F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) \cdot C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x).$$

**Preuve**

Posons  $F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = \tilde{F}$  et  $C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = \tilde{C}$  et montrons que

$$\tilde{F} - 1 = \tilde{F} \cdot \tilde{C}. \text{ En effet, comme } \tilde{F} - 1 = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\sigma \in S_n} w(\sigma) \right) x^n \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F} \cdot \tilde{C} &= \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} w(\sigma) \right) x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\sigma \in C_n} w(\sigma) \right) x^n \right) \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in C_n} w(\sigma) \right) x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} w(\sigma) \right) x^n \right) \text{ en posant } \left( \sum_{\sigma \in C_0} w(\sigma) \right) = 0 \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \left( \left( \sum_{\sigma \in C_k} w(\sigma) \right) \left( \sum_{\sigma \in S_{n-k}} w(\sigma) \right) \right) \right) \cdot x^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \left( \left( \sum_{\sigma \in C_k} w(\sigma) \right) \left( \sum_{\sigma \in S_{n-k}} w(\sigma) \right) \right) \right) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$

$$\sum_{\sigma \in S_n} w(\sigma) = \sum_{k=1}^n \left( \left( \sum_{\sigma \in C_k} w(\sigma) \right) \left( \sum_{\sigma \in S_{n-k}} w(\sigma) \right) \right).$$

L'ensemble  $\mathcal{S}_n$  de toutes les  $n!$  permutations de  $[n]$  peut être partitionné en des sous-ensembles  $\mathcal{S}_n^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) de toutes les permutations  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  pour lesquelles

$$k = \min \{ \ell \mid \sigma(\{1, \dots, \ell\}) = \{1, \dots, \ell\} \}.$$

Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_n^k$  peut être facilement identifié avec le produit



cartésien  $\mathcal{C}_k \times \mathcal{S}_{n-k}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} w(\sigma) &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^k} w(\sigma) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_k \times \mathcal{S}_{n-k}} w(\sigma_1) w(\sigma_2) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_k} w(\sigma) \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-k}} w(\sigma) \right) \right). \end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = b$ , la proposition précédente donne le résultat de Dumont-Kreweras

$$F(a, b; x) - 1 = F(a, b; x) \cdot C(a, b; x).$$

Maintenant, nous donnons la proposition suivante qui généralise les formules (6.1) et (6.2) de Dumont et Kreweras données ci-dessus.

**Proposition 42** On a :

$$\begin{aligned} C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &: = \sum_{n \geq 1} C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\ &= a_1 x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &: = \sum_{n \geq 0} F_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\ &= \frac{\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x)}{(1 - a_1 x) \cdot \Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) - x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))} \end{aligned}$$

**Preuve**

En utilisant le fait que pour tout  $n \geq 1$  :  $C_{n+1}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$

et la formule (6.3) précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &: = \sum_{n \geq 1} C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\
 &= a_1 x + \sum_{n \geq 2} C_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \\
 &= a_1 x + x \cdot \sum_{n \geq 2} G_{n-1}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^{n-1} \\
 &= a_1 x + x \cdot \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) x^n \right) \\
 &= a_1 x + x \cdot \left( x \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))) \right) \\
 &= a_1 x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))).
 \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 41 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 F(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) &= \frac{1}{1 - C(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x)} \\
 &= \frac{1}{1 - (a_1 x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))))} \\
 &= \frac{\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x)}{(1 - a_1 x) \cdot \Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) - x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))}.
 \end{aligned}$$

□

Remarquons que pour  $a_1 = a_2 = \dots = a$  et  $b_1 = b_2 = \dots = a$ , on a :

$$\begin{aligned}
 C(a, b; x) &= C(a, a, \dots; b, b, \dots; x) \\
 &= ax + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, a, \dots; b, b, \dots; x))) \\
 &= ax + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\Omega(a, b; x))) \\
 &= \frac{ax \cdot \Omega(a, b; x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\Omega(a, b; x))}{\Omega(a, b; x)} \\
 &= \frac{ax \cdot \Omega(a, b; x) + x^2 \cdot ab \Omega(a+1, b+1; x)}{\Omega(a, b; x)} \\
 &= ax \cdot \frac{\Omega(a+1, b; x)}{\Omega(a, b; x)}.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F(a, b; x) &= F(a, a, \dots; b, b, \dots; x) \\
&= \frac{\Omega(a, a, \dots; b, b, \dots; x)}{(1 - ax) \cdot \Omega(a, a, \dots; b, b, \dots; x) - x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\Omega(a, a, \dots; b, b, \dots; x))} \\
&= \frac{\Omega(a, b; x)}{(1 - ax) \cdot \Omega(a, b; x) - x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\Omega(a, b; x))} \\
&= \frac{\Omega(a, b; x)}{(1 - ax) \cdot \Omega(a, b; x) - x^2 \cdot ab\Omega(a + 1, b + 1; x)} \\
&= \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b; x) - (ax \cdot \Omega(a, b; x) + x^2 \cdot ab\Omega(a + 1, b + 1; x))} \\
&= \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b; x) - ax \cdot \Omega(a + 1, b; x)} \\
&= \frac{\Omega(a, b; x)}{\Omega(a, b - 1; x)}.
\end{aligned}$$

Pour tout  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$ , on note l'image de  $\sigma$  par la bijection de T. Sillke par  $S(\sigma)$  et l'image de  $\sigma$  par la bijection de P. Ossona de Mendez et P. Rosenstiehl par  $OMR(\sigma)$ . Rappelons que si  $S(\sigma)$  est l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points, alors le nombre de records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha$  et le nombre d'anti-records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\beta$ . Rappelons aussi que si  $OMR(\sigma)$  est l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points, alors le nombre de records de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\alpha$  et le nombre de cycles de  $\sigma$  est égal au nombre de cycles de  $\beta$ .

Le résultat de la proposition suivante découle directement de la bijection d' Ossona de Mendez et Rosenstiehl :

**Proposition 43** *Soit  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$ . Si  $OMR(\sigma) = (\alpha, \beta)$  et si  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$  et le type cyclique de  $\sigma$  tel que  $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + k\sigma_k = n + 1$  et si l'élément  $(n + 1)$  dans la permutation  $\sigma$  écrite sous forme de cycles se trouve dans un cycle de longueur  $i$  pour un certain  $i \in \{2, \dots, k\}$ , alors le type cyclique de  $\beta$  est*

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-2}, \sigma_{i-1} + 1, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_k)$$

La preuve de cette proposition découle directement du fait que  $\beta$  est obtenue de  $\sigma$  en supprimant  $(n + 1)$  et du fait que l'élément  $(n + 1)$  dans la permutation  $\sigma$  écrite sous

forme de cycles se trouve dans un cycle de longueur  $i$  pour un certain  $i \in \{2, \dots, k\}$ .

On peut remarquer que le coefficient de  $b^s$  dans le polynôme  $G_n(1, b)$  et la somme des coefficients de  $a^r b^s$  dans  $G_n(a, b)$  pour n'importe quel  $r$ . Ce coefficient est le nombre d'hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\beta$  a  $s$  cycles. Par conséquent et d'après ce qui précède, ce coefficient est le nombre de permutations connexes  $\sigma \in \mathcal{C}_{n+1}$  ayant  $s$  cycles. Ainsi on peut écrire

$$c_{n+1,s} = [b^s](G_n(1, b)).$$

En d'autre mots, le polynôme  $G_{n-1}(1, b)$  est le polynôme générateur des nombre de cycles sur les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ .

On peut remarquer facilement que le coefficient de  $b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  dans le polynôme  $G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)$  est la somme des coefficients de tous les  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots$  pour n'importe quels  $n_1, n_2, \dots$  dans le polynôme  $G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$ . Comme le coefficient de  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_\ell^{n_\ell} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots b_k^{m_k}$  dans le polynôme  $G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$  est le nombre de toutes les hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que le type cyclique de  $\alpha$  est  $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$  et le type cyclique de  $\beta$  est  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , alors le coefficient de  $b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots b_k^{m_k}$  dans  $G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)$  est le nombre de toutes les hypercartes pointées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que le type cyclique de  $\beta$  est  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ . Par le résultat, de la  $\overline{\text{proposition}}$  43 précédente, déduit de la bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl, ce coefficient est le nombre de toutes les permutations connexes  $\sigma$  dans  $\mathcal{C}_{n+1}$  qui ont un type cyclique de la forme  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  telles qu'il existe  $i \in \{2, \dots, k\}$  et

$$\begin{cases} m_j = p_j & \text{pour tout } i \in [i-2] \cup \{i+2, \dots, k\} \\ m_{i-1} = p_{i-1} + 1 \\ m_i = p_i - 1 \end{cases}$$

et telles que l'élément  $(n+1)$  dans la permutation  $\sigma$  écrite sous forme de cycles se trouve dans un cycle de longueur  $i$ . c'est-à-dire

$$\sigma \in \bigcup_{i=2}^n \mathcal{C}_{n+1,i}^{(m_1, \dots, m_{i-2}, m_{i-1}-1, m_i+1, m_{i+1}, \dots, m_k)}$$

où  $\mathcal{C}_{n,i}^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$  dénote l'ensemble de toutes les permutations connexes  $\sigma$  de l'ensemble  $[n]$  de type cyclique  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  tel que l'élément  $n$  dans la permutation  $\sigma$  écrite sous forme de cycles se trouve dans un cycle de longueur  $i$ .

Ainsi on peut déduire

$$\begin{aligned} [b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots b_k^{m_k}] (G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)) &= \sum_{i=2}^k \left| \mathcal{C}_{n+1,i}^{(m_1, m_2, \dots, m_{i-2}, m_{i-1}-1, m_i+1, \dots, m_k)} \right| \\ &= \left| \mathcal{C}_{n+1,2}^{(m_1-1, m_2+1, m_3, \dots, m_k)} \right| + \dots + \left| \mathcal{C}_{n+1,k}^{(m_1, m_2, \dots, m_{k-1}-1, m_k+1)} \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le résultat principal de ce chapitre donné par la formule (6.4) précédente, nous donnons une expression à la série formelle  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$  et aussi à la série formelle  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n$ . En effet, nous donnons la proposition suivante :

**Proposition 44** On a :

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)} \cdot x^n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n = 1 - e^{\sum_{n \geq 1} \frac{-1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)} \cdot x^n.$$

Pour montrer cette proposition, nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 25** On a :

$$\left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) - 1 = \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right)$$

**Preuve**

On a :

$$\left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) - 1 = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_k} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-k}} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \right) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_k} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-k}} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right).$$

Rappelons que  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est une permutation connexe si  $\sigma([i]) \neq [i]$  pour tout  $i \in [n-1]$ .

L'ensemble  $\mathcal{S}_n$  de toutes les  $n!$  permutations de  $[n]$  peut être partitionné en des sous-ensembles  $\mathcal{S}_n^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) de toutes les permutations  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  pour lesquelles  $k = \min \{ \ell \mid \sigma([\ell]) = [\ell] \}$ . Pour tout  $k \in [n-1]$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_n^k$  peut être facilement identifié avec le produit cartésien  $\mathcal{C}_k \times \mathcal{S}_{n-k}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^k} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{(\sigma', \sigma'') \in \mathcal{C}_k \times \mathcal{S}_{n-k}} b_1^{\sigma'_1 + \sigma''_1} b_2^{\sigma'_2 + \sigma''_2} \dots \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left( \sum_{\sigma' \in \mathcal{C}_k} b_1^{\sigma'_1} b_2^{\sigma'_2} \dots \right) \cdot \left( \sum_{\sigma'' \in \mathcal{S}_{n-k}} b_1^{\sigma''_1} b_2^{\sigma''_2} \dots \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_k} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-k}} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right). \end{aligned}$$

□

Maintenant, nous donnons la preuve de la proposition précédente :

### Preuve

Par le théorème 18 précédent, on a :

$$x \cdot \frac{d}{dx} (\log (\Omega (a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x))) = \sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\log(\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x)) &= \sum_{n \geq 1} \int G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^{n-1} dx \\ &= \left( \sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{x^n}{n} \right) + c'\end{aligned}$$

où  $c'$  est une constante.

Ainsi

$$\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(a_1, a_2, \dots)_n \cdot (b_1, b_2, \dots)_n}{n!} \cdot x^n = c \cdot e^{\sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{x^n}{n}}$$

où  $c$  est une constante strictement positive.

En remplaçant  $x$  par 0, on obtient  $c = 1$  et donc

$$\Omega(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; x) = e^{\sum_{n \geq 1} G_n(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot \frac{x^n}{n}}$$

En posant  $a_1 = a_2 = \dots = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n &= e^{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n} \\ &= \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{G_n^k(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)}{n^k \cdot k!} \cdot x^{nk}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, on peut déduire

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in C_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n &= \frac{\left( \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n \right) - 1}{\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n} \\ &= 1 - \frac{1}{\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\sigma \in S_n} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} \dots \right) \cdot x^n} \\ &= 1 - e^{\sum_{n \geq 1} \frac{-1}{n} \cdot G_n(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots) \cdot x^n} \\ &= 1 - \prod_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \cdot G_n^k(1, 1, \dots; b_1, b_2, \dots)}{n^k \cdot k!} \cdot x^{nk}.\end{aligned}$$

□

## 6.6 Nombre de sous-groupes normaux d'indice $n$ avec $n$ premier, dans un groupe libre à deux générateurs

Le théorème suivant donne le nombre de sous-groupes normaux d'indice  $n$  avec  $n$  premier dans le groupe libre à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$ . Trouver ce nombre pour  $n$  arbitraire reste toujours un problème ouvert.

**Théorème 19** *Le nombre de sous-groupes normaux d'indice  $n$  avec  $n$  premier dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2$  à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$  est  $n + 1$ .*

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$  une permutation connexe et soit  $(\alpha, \beta)$  l'hypercarte pointée à  $n$  points associée à  $\sigma$  par la bijection de Sillke. Soit  $i \in [n]$  le point pointé. Soit  $H$  le sous-groupe d'indice  $n$  du groupe libre à deux générateurs associé à l'hypercarte  $(\alpha, \beta)$  par la bijection de Dress et Franz. Les éléments du sous-groupe  $H$  sont en bijection avec les chemins fermés de  $i$  vers  $i$  dans le graphe associé à l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$ . Il est facile de remarquer que chaque élément du sous-groupe conjugué  $x_1 H x_1^{-1}$  correspond à un chemin fermé dans le graphe précédent du point  $j$  vers  $j$  tel que  $\alpha^{-1}(i) = j$ . En effet, chaque élément du sous-groupe  $x_1 H x_1^{-1}$  correspond à la concaténation d'un chemin de  $j$  vers  $i$ , d'un chemin fermé de  $i$  vers  $i$  et d'un chemin de  $i$  vers  $j$ . Réciproquement, chaque chemin fermé  $e$  de  $j$  vers  $j$  correspond d'une manière unique à la concaténation d'un chemin de  $j$  vers  $i$ , d'un chemin fermé  $e'$  de  $i$  vers  $i$  et d'un chemin de  $i$  vers  $j$ . Le chemin fermé  $e'$  est la concaténation d'un chemin de  $i$  vers  $j$ , du chemin fermé  $e$  de  $j$  vers  $j$  et d'un chemin de  $j$  vers  $i$ . Par conséquent, le sous-groupe  $x_1 H x_1^{-1}$  est associé par la bijection de Dress et Franz à l'hypercarte pointée  $(\gamma, \delta)$  à  $n$  points ayant le point  $\alpha^{-1}(i)$  comme point pointé telle que  $\gamma = \alpha$  et  $\delta = \beta$ . Ainsi on peut remarquer que l'opération du passage du sous-groupe  $H$  vers son conjugué  $x_1 H x_1^{-1}$  consiste uniquement au changement de l'élément pointé de  $i$  vers  $\alpha^{-1}(i)$ . On note la permutation connexe de l'ensemble  $[n + 1]$  associé au sous-groupe  $x_1 H x_1^{-1}$  par  $x_1 \cdot \sigma$ .

De la même manière, on peut remarquer que l'opération du passage du sous-groupe  $H$  vers son conjugué  $x_1^{-1} H x_1$  consiste au changement de l'élément pointé de  $i$  vers  $\alpha(i)$ .



On note la permutation connexe de l'ensemble  $[n + 1]$  associé au sous-groupe  $x_1^{-1} H x_1$  par  $x_1^{-1} \cdot \sigma$ . L'opération du passage du sous-groupe  $H$  vers son conjugué  $x_2 H x_2^{-1}$  consiste au changement de l'élément pointé de  $i$  vers  $\beta^{-1}(i)$ . On note la permutation connexe de l'ensemble  $[n + 1]$  associé au sous-groupe  $x_2 H x_2^{-1}$  par  $x_2 \cdot \sigma$ . L'opération du passage du sous-groupe  $H$  vers son conjugué  $x_2^{-1} H x_2$  consiste au changement de l'élément pointé de  $i$  vers  $\beta(i)$ . On note la permutation connexe de l'ensemble  $[n + 1]$  associé au sous-groupe  $x_2^{-1} H x_2$  par  $x_2^{-1} \cdot \sigma$ .

Pour montrer le théorème précédent, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 26** *Soit*

$$\sigma = (n + 1) a_1 a_2 \cdots a_n 0$$

*une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n + 1\}$  où  $\{a_1, \dots, a_n\} = [n]$ . Posons  $w = w(1) w(2) \cdots w(n)$  tel que  $w(i) = a_i$  pour tout  $i \in [n]$ . Ainsi*

$$\sigma = (n + 1) w(1) w(2) \cdots w(n) 0.$$

*On a :*

$$x_1 \cdot \sigma = (n + 1) w_1(1) \cdots w_1(k - 1) w_1(k) \cdots w_1(n) 0,$$

*où*

$$w_1(i) = w(i + 1) - w(1) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n + 1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n],$$

*et*

$$w(n + 1) = 0.$$

**Preuve**

Comme  $\sigma$  a un seul record  $(n + 1)$  et un seul anti-record 0, alors par la bijection de Sillke l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$  associé à  $\sigma$  est donnée comme suit :

$$\alpha = (a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_n 0) \text{ et } \beta = (0 1 2 \cdots n)$$

et l'élément pointé est 0. Soit  $H$  le sous-groupe d'indice  $n + 1$  de  $\mathcal{F}_2$ , le groupe libre engendré par deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$ , associé à cette hypercarte pointée par la bijection de Dress et Franz. D'après ce qui précède, l'hypercarte associée à la permutation

$x_1 \cdot \sigma$  par la bijection de Sillke est l'hypercarte pointée  $(\gamma, \delta)$  ayant le point pointé  $a_1$  car  $\alpha^{-1}(0) = a_1$  telle que  $\gamma = \alpha$  et  $\delta = \beta$ . Cette hypercarte pointée est associée par la bijection de Dress et Franz au sous-groupe  $x_1 H x_1^{-1}$ . Posons

$$\gamma' = ((n+1) a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_n 0 a_1)$$

et

$$\delta' = (a_1(a_1+1) \cdots n 0 1 2 \cdots (a_1-1)(n+1)).$$

Posons  $\varphi(a_1) = 0$ ,  $\varphi(a_1+1) = 1, \dots, \varphi(n) = n-a_1$ ,  $\varphi(0) = n-a_1+1$ ,  $\varphi(1) = n-a_1+2$ ,  $\varphi(2) = n-a_1+3, \dots, \varphi(a_1-1) = n$  et  $\varphi(n+1) = n+1$ .

On peut remarquer que  $\varphi(n+1) = n+1$ ,  $\varphi(0) = n-a_1+1$  et

$$\varphi(a_i) = \begin{cases} a_i - a_1 & \text{si } a_1 \leq a_i \leq n \\ n - a_1 + a_i + 1 & \text{si } 1 \leq a_i \leq a_1 - 1 \end{cases}$$

En remplaçant chaque élément  $i$  dans  $\gamma'$  et  $\delta'$  par  $\varphi(i)$ , on peut écrire

$$\gamma'' = ((n+1)\varphi(a_2) \cdots \varphi(a_k) \varphi(a_{k+1}) \cdots \varphi(a_n) \varphi(0) 0)$$

et

$$\delta'' = (0 1 \cdots (n-a_1)(n-a_1+1)(n-a_1+2)(n-a_1+3) \cdots n(n+1)).$$

Par conséquent, en posant  $w_1(i) = \varphi(a_{i+1})$  pour tout  $i \in 1, \dots, n-1$  et  $w_1(n) = \varphi(0) = n-a_1+1$ , on obtient

$$x_1 \cdot \sigma = (n+1) w_1(1) \cdots w_1(k-1) w_1(k) \cdots w_1(n-1) w_1(n) 0.$$

Comme  $w \in \mathcal{S}_n$ , alors on peut l'identifier à la fonction  $\frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}}$  égale à  $w$  sur  $\{1, \dots, n\}$  et fixant 0.

Montrons que pour tout  $i \in [n] : w_1(i) = w(i+1) - w(1)$  dans  $\frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}}$ . En effet, pour tout  $i \in 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned}
 w_1(i) &= \varphi(a_{i+1}) \\
 &= \begin{cases} a_{i+1} - a_1 & \text{si } a_1 \leq a_{i+1} \leq n \\ n - a_1 + a_{i+1} + 1 & \text{si } 1 \leq a_{i+1} \leq a_1 - 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} a_{i+1} - a_1 & \text{si } a_1 \leq a_{i+1} \leq n \\ (n+1) + a_{i+1} - a_1 & \text{si } 1 \leq a_{i+1} \leq a_1 - 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} a_{i+1} - a_1 & \text{si } a_1 \leq a_{i+1} \leq n \\ a_{i+1} - a_1 \text{ modulo } (n+1) & \text{si } 1 \leq a_{i+1} \leq a_1 - 1 \end{cases} \\
 &= a_{i+1} - a_1 \text{ modulo } (n+1) \\
 &= w(i+1) - w(1) \text{ modulo } (n+1).
 \end{aligned}$$

Pour  $i = n$ ,

$$\begin{aligned}
 w_1(i) &= w_1(n) \\
 &= \varphi(0) \\
 &= n - a_1 + 1 \\
 &= (n+1) - a_1 \\
 &= 0 - a_1 \text{ modulo } (n+1) \\
 &= w(0) - w(1) \text{ modulo } (n+1) \text{ car notre fonction } w \text{ fixe } 0 \text{ et donc } w(0) = 0 \\
 &= w(n+1) - w(1) \text{ modulo } (n+1).
 \end{aligned}$$

□

Par exemple, considérons la permutation connexe suivante de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, 8+1\}$  où  $n = 8$  :

$$\sigma = 9284316570.$$

On a :

$$\alpha = (284316570) \text{ et } \beta = (012345678),$$

où le point pointé est 0. Pointons 2 au lieu de 0 car  $\alpha^{-1}(0) = 2$ , ainsi

$$\gamma' = (9843165702) \text{ et } \delta' = (2345678019)$$

On faisant  $2 \mapsto 0, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 3, 6 \mapsto 4, 7 \mapsto 5, 8 \mapsto 6, 0 \mapsto 7, 1 \mapsto 8$   
et  $9 \mapsto 9$ . On obtient

$$\gamma'' = (9621843570) \text{ et } \delta'' = (0123456789),$$

ce qui implique que

$$x_1 \cdot \sigma = 9621843570.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} w_1(1) &= 6 = w(2) - w(1) = 8 - 2 = 6, \\ w_1(2) &= 2 = w(3) - w(1) = 4 - 2 = 2, \\ w_1(3) &= 1 = w(4) - w(1) = 3 - 2 = 1, \\ w_1(4) &= 8 = w(5) - w(1) = 1 - 2 = -1 = -1 + 9 = 8, \\ w_1(5) &= 4 = w(6) - w(1) = 6 - 2 = 4, \\ w_1(6) &= 3 = w(7) - w(1) = 5 - 2 = 3, \\ w_1(7) &= 5 = w(8) - w(1) = 7 - 2 = 5, \\ w_1(8) &= 7 = w(9) - w(1) = w(0) - w(1) = 0 - 2 = -2 = -2 + 9 = 7. \end{aligned}$$

On peut donner le corollaire suivant :

**Corollaire 15** *Soit*

$$\sigma = (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n 0$$

où  $\{a_1, \dots, a_n\} = [n]$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n+1\}$ . Posons  $w = w(1) w(2) \cdots w(n)$  tel que  $w(i) = a_i$  pour tout  $i \in [n]$ . Ainsi

$$\sigma = (n+1) w(1) w(2) \cdots w(n) 0.$$

Alors, le nombre de permutations  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n, n+1\}$  pour lesquelles

$$x_1 \cdot \sigma = \sigma,$$

est

$$n.$$

### Preuve

Comme  $x_1 \cdot \sigma = \sigma$ , alors  $w_1(i) = w(i)$  pour tout  $i \in [n]$ . Ce qui implique que  $w(i) = w(i+1) - w(1)$  dans  $\frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}}$  pour tout  $i \in [n]$ . Ainsi,

$$w(i+1) - w(i) = w(1) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

Donc

$$w(i) = iw(1) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

Soit  $\text{pgcd}(w(1), n+1) = d$  où  $d \in [n]$ , alors

$$\begin{aligned} w(1) &= p \cdot d \\ n+1 &= q \cdot d \\ \text{pgcd}(p, q) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$w(i) = i \cdot p \cdot d \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

Ce qui implique que

$$q \cdot w(i) = 0 \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

Par conséquent,  $q = 0$  dans  $\frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}}$  c'est-à-dire  $q = k \cdot (n+1)$  pour un certain  $k$ .

Comme  $n+1 = q \cdot d$ , alors  $k \cdot d = 1$ , ce qui implique que  $d = 1$ , c'est-à-dire

$$w(1) \text{ et } (n+1) \text{ sont premiers entre eux.}$$

Par conséquent, on peut choisir  $w(1)$  dans  $[n]$  de  $\phi(n+1)$  façons où  $\phi$  est l'opérateur d'Euler. Pour conclure, il suffit de remarquer que  $\phi(n+1) = n$ .

□

Posons  $x_1^2 \cdot \sigma = x_1 \cdot (x_1 \cdot \sigma)$  et pour tout  $k \geq 3$  :  $x_1^k \cdot \sigma = x_1 \cdot (x_1^{k-1} \cdot \sigma)$ . On peut donner le lemme suivant :

**Lemme 27** *Soit*

$$\sigma = (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n 0$$

où  $\{a_1, \dots, a_n\} = [n]$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n+1\}$ . Posons  $w = w(1) w(2) \cdots w(n)$  tel que  $w(i) = a_i$  pour tout  $i \in [n]$ . Ainsi

$$\sigma = (n+1) w(1) w(2) \cdots w(n) 0.$$

Alors pour tout  $k \geq 1$  :

$$x_1^k \cdot \sigma = (n+1) w_k(1) \cdots w_k(k-1) w_k(k) \cdots w_k(n) 0,$$

où

$$w_k(i) = w(i+k) - w(k) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

De plus

$$x_1 \cdot \sigma = \sigma \text{ implique que } x_1^k \cdot \sigma = \sigma \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Ainsi, le nombre de permutations  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n, n+1\}$  pour lesquelles

$$x_1^k \cdot \sigma = \sigma \text{ pour tout } k \geq 1$$

est

$$n.$$

## Preuve

Montrons par récurrence sur  $k$  que pour tout  $k \geq 1$  :

$$w_k(i) = w(i+k) - w(k) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n].$$

Par le corollaire précédent, cette propriété est vraie pour  $k = 1$ . Supposons que cette propriété est vraie pour  $k-1$  c'est-à-dire

$$w_{k-1}(i) = w(i+k-1) - w(k-1) \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}} \text{ pour tout } i \in [n]$$

et montrons qu'elle est vraie pour  $k$ . Comme  $x_1^k \cdot \sigma = x_1 \cdot (x_1^{k-1} \cdot \sigma)$ , alors par le corollaire précédent

$$w_k(i) = w_{k-1}(i+1) - w_{k-1}(1).$$

Ce qui implique par l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned} w_k(i) &= (w(i+1+k-1) - w(k-1)) - (w(1+k-1) - w(k-1)) \\ &= w(i+k) - w(k). \end{aligned}$$

Montrons que

$$x_1 \cdot \sigma = \sigma \text{ implique que } x_1^k \cdot \sigma = \sigma \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Comme  $x_1 \cdot \sigma = \sigma$ , alors  $w(i) = iw(1)$  pour tout  $i \in [n]$ . Pour montrer que  $x_1^k \cdot \sigma = \sigma$ , il suffit de montrer que  $w_k(i) = w(i)$  pour tout  $i \in [n]$ . On a :

$$\begin{aligned} w_k(i) &= w(i+k) - w(k) \\ &= (i+k)w(1) - kw(1) \\ &= iw(1) \\ &= w(i). \end{aligned}$$

□

Maintenant, nous donnons la preuve du théorème 19 précédent.

### Preuve

Soit  $H$  un sous-groupe d'indice  $n$  du groupe libre  $\mathcal{F}_2$  à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$ . Soit  $(\alpha, \beta)$  l'hypercarte pointée à  $n$  points associée à  $H$ . Pour que  $H$  soit normal il est nécessaire et suffisant que le changement de l'élément pointé donne toujours la même hypercarte pointée à isomorphisme près.

Remarquons que pour que  $H$  soit normal, il est nécessaire que tous les cycles de  $\alpha$  aient la même longueur et que tous les cycles de  $\beta$  aient la même longueur.

Comme  $n$  est premier et comme tous les cycles de  $\alpha$  ont la même longueur, qu'on note par  $\ell_1$ , qui est un diviseur de  $n$  et comme tous les cycles de  $\beta$  ont la même longueur, qu'on note par  $\ell_2$ , qui est un diviseur de  $n$ , alors on peut distinguer les trois cas suivants :

Premier cas :  $\ell_1 = \ell_2 = 1$ . Dans ce cas, le couple  $(\alpha, \beta)$  n'est pas une hypercarte car le graphe simple orienté ayant l'ensemble  $[n]$  comme ensemble de sommets et l'ensemble  $E$  comme ensemble d'arêtes n'est pas connexe où

$$E = \{(i, \alpha(i)) \mid i \in [n]\} \cup \{(i, \beta(i)) \mid i \in [n]\}.$$

Deuxième cas :  $\ell_1 = \ell_2 = n$ . Dans ce cas, chacune des permutations  $\alpha$  et  $\beta$  de l'ensemble  $[n]$  est un cycle de longueur  $n$  et la permutation connexe  $\sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$ , associée à l'hypercarte pointée  $(\alpha, \beta)$ , a un seul record qui est  $n+1$  et un seul anti-record qui est 1 et donc par la bijection de Sillke l'élément pointé de l'hypercarte  $(\alpha, \beta)$  est 1. On peut déduire que :

$$x_1 \cdot \sigma = \sigma \Rightarrow x_2 \cdot \sigma = \sigma.$$

En effet,  $x_2 \cdot \sigma$  est la permutation connexe de  $[n+1]$  qui correspond par la bijection de Sillke à l'hypercarte  $(\alpha', \beta')$  à  $n$  points telle que  $\alpha' = \alpha$  et  $\beta' = \beta$  ayant  $\beta^{-1}(1)$  comme point pointé. Comme la permutation  $\alpha$  de l'ensemble  $[n]$  est un cycle de longueur  $n$ , alors  $\beta^{-1}(1) = (\alpha^{-1})^q(1)$  pour un certain  $q \in [n]$  où pour tout  $p \geq 2$  :  $(\alpha^{-1})^p = (\alpha^{-1})^{p-1} \circ \alpha^{-1}$  et  $(\alpha^{-1})^1 = \alpha^{-1}$ . Soit  $(\alpha'', \beta'')$  l'hypercarte à  $n$  points telle que  $\alpha'' = \alpha$  et  $\beta'' = \beta$  ayant  $(\alpha^{-1})^q(1)$  comme point pointé. L'hypercarte  $(\alpha'', \beta'')$  est l'hypercarte qui correspond par la bijection de Sillke à la permutation connexe  $x_1^q \cdot \sigma$  de l'ensemble  $[n+1]$ . Comme  $\beta^{-1}(1) = (\alpha^{-1})^q(1)$ ,  $\alpha' = \alpha = \alpha''$  et  $\beta' = \beta = \beta''$ , alors  $x_1^q \cdot \sigma = x_2 \cdot \sigma$ . Ainsi, par le lemme précédent,

$$x_1 \cdot \sigma = \sigma \Rightarrow x_1^q \cdot \sigma = \sigma \Rightarrow x_2 \cdot \sigma = \sigma.$$

Par conséquent, par le corollaire précédent, il y a  $n-1$  sous-groupes possibles.

Troisième cas :  $\ell_1 = n$  et  $\ell_2 = 1$ . Dans ce cas il y a un seul record qui est  $n+1$  et  $n$  anti-records et le sous-groupe associé est le sous-groupe associé à la permutation



$$\tau = (n+1) 123 \cdots (n-1) n.$$

Quatrième cas :  $\ell_1 = 1$  et  $\ell_2 = n$ . Dans ce cas, il y a  $n$  records et un seul anti-records ce qui correspond à un seul sous-groupe qui est le sous-groupe associé à la permutation  $\tau^{-1} = 234 \cdots n (n+1) 1$ .

Par conséquent, le nombre de sous-groupes d'indice  $n$  est  $(n-1) + 1 + 1$ , c'est-à-dire  $n+1$ .

□



## CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons élaboré des algorithmes sur les mots de Yamanouchi qui sont en bijection avec les tableaux de Young standards. Ces algorithmes simulent les algorithmes correspondants bien connus sur les tableaux. Par ailleurs, nous avons transposé un mot de Yamanouchi ce qui correspond au tableau transposé (définition 38). Nous avons aussi défini les glissements en avant et en arrière sur un suffixe d'un mot de Yamanouchi, ce qui correspond aux glissements du jeu de taquin de Schützenberger sur un tableau gauche standard (définitions 40 et 41). Nous avons évacué un mot de Yamanouchi ce qui correspond à l'application de l'opération d'évacuation à un tableau (définition 43). D. Foata (Foata, 1976) a utilisé la même définition que nous avons donné au transposé d'un mot de Yamanouchi mais pour un mot quelconque. Il a aussi utilisé l'algorithme d'évacuation d'un mot de Yamanouchi pour résoudre une conjecture de Schützenberger dans un cas particulier. D. Foata est le premier qui a traduit l'algorithme d'évacuation des tableaux de Young standards aux mots de Yamanouchi. Nous avons élaboré un algorithme donnant la bijection de Schensted entre les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme un partage de  $n$  (définition 48). Nous avons défini des fonctions que nous avons appelé fonctions d'insertion (définition 44 et 45) et fonctions de suppression (définition 46 et 47). Ces fonctions correspondent aux algorithmes d'insertion et de suppression liés à un élément et un tableau utilisés par Schensted. Nous avons aussi illustré le lien entre ces fonctions d'insertion et de suppression et la construction géométrique de Viennot qui donne un cadre naturel pour la correspondance de Schensted. Nous avons remarqué que Viennot, dans sa construction géométrique, a montré en utilisant ces mêmes fonctions d'insertion que les permutations de l'ensemble  $[n]$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme un partage de  $n$  sont en bijection. Il est le premier qui a utilisé ces fonctions d'insertion. Les fonctions de suppression sont complètement nouvelles.

Nous avons élaboré un algorithme de redressement d'un mot qui n'est pas un mot de Yamanouchi (définition 49). Cet algorithme correspond à l'algorithme bien connu de redressement d'un tableau gauche standard pour obtenir un tableau de Young standard en utilisant une suite de glissements du jeu de taquin de Schützenberger. Nous avons noté le mot de Yamanouchi obtenu par cet algorithme à partir du mot  $w$  par  $\mathcal{F}(w)$ . Ensuite nous avons montré que  $\mathcal{F}(w) = \mathcal{L}(w)$  où  $\mathcal{L}(w)$  est le mot de Yamanouchi obtenu par un algorithme de Robinson qui associe à chaque mot  $w$  qui n'est pas un mot de Yamanouchi un mot de Yamanouchi unique qu'on note par  $\mathcal{L}(w)$  (Théorème 8). Ce résultat principal a été conjecturé par notre directeur de recherche Christophe Reutenauer. Nous avons utilisé la définition de  $\mathcal{F}(w)$  donné par notre algorithme de redressement pour montrer un théorème de Schützenberger (proposition 21). Ensuite nous avons défini l'évacué d'un mot de Yamanouchi en utilisant l'algorithme de Robinson (théorème 10), ce qui nous a permis de donner une nouvelle preuve pour un théorème de van Leeuwen (corollaire 7). Nous avons aussi donné une nouvelle formule pour la correspondance de Schensted en utilisant l'algorithme de redressement (proposition 26). Cette formule nous a permis de donner une nouvelle preuve pour des résultats bien connus de Schensted et de Schützenberger comme le résultat de Schensted donnant le lien entre le  $P$ -symbole d'une permutation  $\sigma$  et le  $P$ -symbole de son image miroir  $\sigma^*$ .

Van Leeuwen a donné une description précise au lien entre les algorithmes de Robinson et celui de Schensted. Ces deux algorithmes donnent deux bijections analogues. Dans la littérature, ces deux bijection sont connues sous le même nom : Correspondance de Robinson-Schensted. Nous avons généralisé ce résultat de van Leeuwen des permutations aux mots arbitraires (proposition 24). Ensuite nous avons utilisé cette généralisation pour donner une réponse à une question posée par Thomas. Il s'agit de trouver une formule permettant de donner le nombre de réductions de type  $R(k)$  nécessaires pour obtenir le mot de Yamanouchi  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$  (théorème 9). Thomas a posé une deuxième question qui est toujours ouverte. Il s'agit de trouver une formule permettant de donner le nombre de suites de réductions de type  $R(k)$  possibles pour obtenir  $\mathcal{L}(w)$  à partir de  $w$ .

Nous avons généralisé un résultat bien connu des tableaux de Young standards aux tableaux gauches standards (proposition 5) et aussi aux arrangements de van Leeuwen (Proposition 6). Ce résultat concerne deux mots notés par  $\text{read}(t)$  et  $\text{row}(t)$  pour  $t$  un tableau de Young standard. Pour montrer ce résultat, nous avons interprété géométriquement les standardisations à gauche et à droite d'un mot en l'identifiant à un arrangement comme le fait van Leeuwen. Nous avons aussi donné un résultat intéressant donnant un lien entre la standardisation d'un mot, son préfixe ou son suffixe et sa restriction à un sous-ensemble de lettres (corollaire 2).

Nous avons remarqué que la concaténation de deux mots de Yamanouchi est un mot de Yamanouchi. Nous avons donné l'opération correspondante sur les tableaux de Young standards. Ensuite, nous avons remarqué que cette opération sous sa forme tableau intervient dans (Poirier et Reutenauer, 1995). Nous avons défini une paire de Yamanouchi indécomposable, ensuite nous avons montré que les paires de Yamanouchi indécomposables de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$ . Comme les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$  sont en bijection avec les hypercartes pointées à  $n - 1$  points (bijection de Sillke) et aussi avec les sous-groupes d'indice  $n - 1$  du sous-groupe libre à deux générateurs (bijection de Dress et Franz), alors les paires de Yamanouchi indécomposables sont en bijection avec les hypercartes pointées à  $n - 1$  points. Nous posons le problème ouvert de trouver cette dernière bijection sans utiliser les permutations connexes.

Nous avons posé une nouvelle conjecture liée à une conjecture de Schützenberger et à la correspondance de Schensted. Nous avons montré que cette nouvelle conjecture implique celle de Schützenberger. Nous conjecturons que la conjecture de Schützenberger implique aussi cette nouvelle conjecture mais donner une preuve reste toujours un problème ouvert. Nous pensons qu'il y a un lien entre les deux cycles donnés par les deux conjectures et donc nous posons le problème de trouver ce lien. En utilisant l'algorithme que nous avons établi pour la correspondance de Schensted entre les permutations de  $[n]$  et les paires de mots de Yamanouchi de même forme un partage de  $n$ , nous avons montré cette nouvelle conjecture dans un cas particulier où les tableaux de Young standards

ont seulement deux lignes. Nous nous sommes inspiré de la preuve de Degroseilliers et *al* pour un théorème de Foata qui démontre la conjecture de Schützenberger dans un cas particulier pour donner une autre preuve pour ce théorème. Notre preuve utilise les promotions inverses alors que la preuve de Degroseilliers et *al* utilise les promotions. Nous avons aussi posé une conjecture donnant notre nouvelle conjecture dans le cas des tableaux de Young standards ayant seulement un seul coin intérieur.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons établi deux nouvelles formules pour les permutations connexes. La première formule concerne les permutations connexes selon leur nombre (théorème 14) et la deuxième formule généralise la première et concerne les permutations connexes selon leur nombre de cycles (corollaire 12). Nous avons aussi donné des preuves nouvelles pour toutes les formules donnant les permutations connexes selon leur nombre et aussi selon leur nombre de cycles comme celles données dans (Cori, 2008) (corollaire 10 et corollaire 13). Pour le faire, nous avons utilisé des formules établies par Dumont et Kreweras dans leur étude d'une famille de fractions continues liée à la série hypergéométrique. Nous avons généralisé une formule donnée par Sillke (théorème 16) lorsqu'il a construit une bijection entre les permutations connexes de l'ensemble  $[n + 1]$  et l'ensemble de hypercartes pointées à  $n$  points. Ce résultat plus général a été conjecturé par notre directeur de recherche Christophe Reutenauer. La généralisation réside dans le passage du nombre de cycles au type cyclique. Nous avons montré que ce résultat de Sillke est équivalent au résultat de Dumont et Kreweras ensuite nous avons généralisé le résultat de Dumont et Kreweras en donnant des formules avec le type cyclique (proposition 38). Nous avons aussi donné une formule qui concerne les hypercartes étiquetées (corollaire 14). Cette formule généralise celle de R. Cori. Nous avons aussi donné une expression à chacune des séries formelles donnant respectivement le nombre des permutations selon leur type cyclique et le nombre des permutations connexes selon leur type cyclique. Nous posons le problème de trouver une formule pour ce dernier nombre. Finalement, nous avons montré que lorsque l'entier  $n$  est premier,  $n + 1$  est le nombre de sous-groupes normaux d'indice  $n$  dans le groupe libre à deux générateurs. Nous posons le problème de trouver ce nombre lorsque l'entier  $n$  est arbitraire.

## ANNEXE A

### NOTATIONS

$|A|$  : le cardinal de l'ensemble  $A$

$a_n^{(k)}$  : le nombre de sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  à  $k$  générateurs

$a_n = a_n^{(2)}$  : le nombre de sous-groupes d'indice  $n$  dans le groupe libre  $\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  à deux générateurs

$\mathbf{a}_w$  : l'arrangement associé au mot  $w$

$\mathbf{a}\text{-re-ex-}(n, k)$  : le nombre de permutations de l'ensemble  $[n]$  qui ont  $k$  anti-records exclusifs

$(a)_n = a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{cyc}(\sigma)$

$(a_1, a_2 \dots)_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \dots$  où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  est le type cyclique de la permutation  $\sigma$

$\mathbf{a}^{(n)}$  : l'arrangement associé à la permutation  $12 \cdots n$  de l'ensemble  $[n]$

$\mathbf{a}_w^{-\emptyset}$  : l'arrangement obtenu de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  en supprimant toutes les lignes vides

$\mathcal{B}(w)$  : le mot de Yamanouchi associé à la permutation  $w$  à partir de l'opérateur formel  $\mathcal{B}_w$

$\mathcal{B}_w$  : l'opérateur formel  $\mathcal{B}_w$  associé à  $w$  par l'algorithme de Robinson «association II»

$c = (c_1, c_2, \dots, c_k) \models n$  : une composition de l'entier  $n$  donnée sous forme d'une suite

$c_{n,k}$  : le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $k$  cycles

$c(n, k)$  : le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $k$  records

$c(n, r, s)$  : le nombre de toutes les permutations connexes de  $[n]$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records

$\mathcal{C}_n$  : l'ensemble de toutes les permutations connexes de  $[n]$

$\text{cyc}(\sigma)$  : le nombre de cycles de la permutation  $\sigma$

$\mathfrak{C}_n$  : l'ensemble de toutes les hypercartes pointées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$

$C_{ij}$  : l'opérateur formel associé par Robinson suite à l'application des réductions :

$R(i), R(i-1), \dots, R(j)$ .

$\chi_w$  : l'unique bijection croissante de l'ensemble des  $n$  lettres du mot  $w$  vers l'ensemble  $[n]$  où  $|w| = n$

$\deg(w)$  : la somme des lettres du mot  $w$

$\mathcal{D}_i$  : la fonction de suppression associée à la lettre  $i$

$\mathcal{D}_u$  : la fonction de suppression associée au mot  $u$

$ev(P)$  : le tableau obtenu du tableau  $P$  en appliquant l'algorithme d'évacuation

$E_i$  : la fonction associée à la lettre  $i$  qui dépende de la fonction d'insertion  $\mathcal{I}_i$

$E_u$  : la fonction associée au mot  $u$  qui dépende de la fonction d'insertion  $\mathcal{I}_u$

$f_w$  : la fonction associée à  $st_g(w)$

$f_w^{-1}$  : la fonction réciproque de  $f_w$



$f_\lambda$  : le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$  un partage de  $n$ .

$\mathcal{F}(w)$  : le mot de Yamanouchi associé au mot  $w$  par l'algorithme de redressement

$\mathcal{F}_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  : le groupe libre à  $k$  générateurs

$\mathcal{F}_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$  : le groupe libre à deux générateurs  $x_1$  et  $x_2$

$g \cong g'$  : le tableau gauche standard  $g'$  peut être obtenu du tableau  $g$  par une suite de Glissements

$\gamma_c$  : l'unique permutation du sous-groupe de Young  $\mathcal{S}_c$  du groupe  $\mathcal{S}_n$  de longueur maximale

$h_w$  : la fonction associée à  $st_d(w)$

$h_w^{-1}$  : la fonction réciproque de  $h_w$

$\mathcal{H}_n$  : l'ensemble de toutes les hypercartes étiquetées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$

$\mathcal{H}_n^\bullet$  : l'ensemble de toutes les hypercartes étiquetées pointées de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n$

$h_n$  : le nombre de toutes les permutations connexes de l'ensemble  $[n]$

$H_i$  : la fonction associée à la lettre  $i$  qui dépend de la fonction de suppression  $\mathcal{D}_i$

$H_u$  : la fonction associée au mot  $u$  qui dépend de la fonction de suppression  $\mathcal{D}_u$

$h_{n,r,s}$  : le nombre d'hypercartes étiquetées  $(\alpha, \beta)$  à  $n$  points telles que  $\text{cyc}(\alpha) = r$  et  $\text{cyc}(\beta) = s$

$Id$  : la permutation identité

$inv(\sigma)$  : le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma$

$inv(T)$  : le nombre d'inversions du tableau  $T$

$i_u(a)$  : l'indice de la lettre  $a$  dans le mot  $u$

$\mathcal{I}_i$  : la fonction d'insertion associée à la lettre  $i$

$\mathcal{I}_u$  : la fonction d'insertion associée au mot  $u$

$J^u(g)$  : le tableau gauche standard obtenu par un glissement en avant du jeu de taquin de Schützenberger sur le tableau gauche standard  $g$  à partir de la case  $u$

$J_u(g)$  : le tableau gauche standard obtenu par un glissement en arrière du jeu de taquin de Schützenberger sur le tableau gauche standard  $g$  à partir de la case  $u$

$J(g)$  : le redressé du tableau gauche standard  $g$

$J^P(Q)$  : le tableau gauche standard obtenu par une suite de glissements en avant du jeu de taquin de Schützenberger sur le tableau gauche standard  $Q$  à partir des cases de  $P$

$J_P(Q)$  : le tableau gauche standard obtenu par une suite de glissements en arrière du jeu de taquin de Schützenberger sur le tableau gauche standard  $Q$  à partir des cases de  $P$

$\log$  : la fonction logarithmétique népérienne

$L(P)$  : la ligne saillante de la partie  $P$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(w)$  : le mot de Yamanouchi associé au mot  $w$  par l'algorithme de Robinson  
 $\ll \text{association I} \gg$

$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0) \vdash n$  : un partage de l'entier  $n$  sous forme d'une suite

$\lambda'$  : le partage conjugué du partage  $\lambda$

$\lambda/\mu$  : le diagramme gauche associé aux partages  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\mu \subseteq \lambda$

$\min(a, b)$  : le minimum de  $a$  et  $b$

$\mathbb{N}$  : l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^*$  : l'ensemble de tous les mots finis sur  $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}_n^*$  : l'ensemble de tous les mots de  $\mathbb{N}^*$  de longueur  $n$ .

$n$  : un entier naturel

$[n]$  : l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$

$n!$  : la factorielle de l'entier naturel  $n$

$OMR$  : la bijection d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl entre  $\mathcal{C}_{n+1}$  et  $\mathcal{C}_n$

$O(m)$  : l'ombre du point  $m$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$O(P)$  : l'ombre de la partie  $P$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{P} := \{1, 2, 3, \dots\}$  : l'ensemble des entiers strictement positifs

$\mathbb{P}^*$  : l'ensemble de tous les mots finis sur  $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}^n$  : l'ensemble de tous les mots de  $\mathbb{P}^*$  de longueur  $n$

$P(\sigma)$  : le  $P$ -symbole de la permutation  $\sigma$

$P^T$  : le tableau  $P$  transposé

$(P \leftarrow x)$  : le tableau obtenu par insertion (insertion ligne) de l'élément  $x$  dans le tableau  $P$

$\text{préf}_k(w)$  : le préfixe de  $w$  de longueur  $k$

$P_k$  : le tableau obtenu par l'algorithme d'insertion de Schensted des  $k$  premiers éléments parmi  $n$  éléments

$(P^{(k)}, Q^{(k)})$  : la paire de tableaux associée par la correspondance de Schensted à la

quasi-permutation  $Sq^k(\sigma)$

$P^{(k)}$  : le tableau obtenu par l'algorithme d'insertion de Schensted des  $k$  premiers éléments

$P \cup Q$  : le tableau gauche standard obtenu à partir des deux tableaux gauches standards

$P$  et  $Q$  lorsque la forme de  $Q$  prolonge la forme de  $P$

$(P_1, Q_1) * (P_2, Q_2)$  : la paire de tableaux de Young standards obtenue à partir des deux paires de tableaux de Young standards  $(P_1, Q_1)$  et  $(P_2, Q_2)$

$P * Q$  : le tableau de Young standard obtenu à partir des deux tableaux de Young standards  $P$  et  $Q$

$PY^\lambda$  : l'ensemble de toutes les paires de Yamanouchi de forme  $\lambda \vdash n$

$\pi$  : correspondance de Schensted

$\pi^{-1}$  : correspondance inverse de Schensted

$Q(\sigma)$  : le  $Q$ -symbole de la permutation  $\sigma$

$Q_k$  : le tableau associé au tableau  $P_k$  suite à l'application de l'algorithme d'insertion de Schensted

$\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombre réels

$\mathbb{R}^+$  : l'ensemble des nombre réels positifs

$\text{read}(T)$  : la permutation obtenue, comme mot, en lisant les lignes de  $T$  de gauche à droite et du haut vers le bas

$\text{row}(T)$  : la permutation obtenue, comme mot, en lisant les lignes de  $T$  de gauche à droite et du bas vers le haut

$R(k)$  : la réduction associée à la lettre  $k$  suite à l'application de l'algorithme de Robinson

$r_i$  : l'opérateur de Haiman

$S$  : La bijection de Sillke entre  $\mathcal{C}_{n+1}$  et  $\mathfrak{C}_n$

$\mathcal{S}_n$  : le groupe symétrique à  $n$  éléments

$\mathcal{S}_\lambda$  : le sous-groupe de Young de  $\mathcal{S}_n$  associé au partage  $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0)$  de  $n$

$\mathcal{S}_c$  : le sous-groupe de Young de  $\mathcal{S}_n$  associé à la composition  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  de  $n$

$S_w$  : le tableau de Young standard associé au tableau  $t_w$

$S(P)$  : l'ensemble des points saillants de la partie  $P$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$S_d^+(L)$  : l'ensemble des points saillants supérieurs droits de  $L$ .

$sign(\sigma)$  : signature de la permutation  $\sigma$

$sign(T)$  : signature du tableau  $T$

$Sq(\tau)$  : le squelette de la quasi-permutation  $\tau$

$Sq(\sigma) = \sigma$  : le squelette (d'ordre 0) de la permutation  $\sigma$

$Sq(\sigma) = Sq(\hat{\sigma})$  : le squelette (d'ordre 1) de la permutation  $\sigma$

$Sq^k(\sigma)$  : le squelette (d'ordre  $k$ ) de la permutation  $\sigma$

$Sq^*(\sigma) = \bigcup_{k \geq 0} Sq^k(\sigma)$

$st_g(w)$  : le standardisé gauche du mot  $w$

$st_d(w)$  : le standardisé droit du mot  $w$

$st(T| [k+1, n])$  : le tableau gauche de Young standard obtenu du tableau gauche standard  $T| [k+1, n]$  en soustrayant  $k$  à chacun de ses éléments

$\text{suffix}_k(w)$  : le suffixe de  $w$  de longueur  $k$

$\text{Supp}(\tau)$  : le support de la quasi-permutation  $\tau$

$\text{Support}(\sigma) = \{i \in [n] \mid \sigma(i) \neq i\}$  : le support de la permutation  $\sigma$

$s_{n,k}$  : le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $k$  cycles

$s(n, k)$  : le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $k$  records

$s(n, r, s)$  : le nombre de toutes les permutations de  $[n]$  ayant  $r$  records et  $s$  anti-records

$s_w(k)$  : la saillie de la lettre  $k$  dans le mot  $w$

$s_i = (i \ i + 1)$  : une transposition élémentaire

$tr^{\nearrow}(T)$  : la traînée du tableau  $T$

$tr^{\searrow}(T)$  : la traînée inverse du tableau  $T$

$\text{TYS}^\lambda$  : l'ensemble de tous les tableaux de Young standards de forme  $\lambda \vdash n$

$\text{TGS}^{\lambda/\mu}$  : l'ensemble de tous les tableaux gauches de Young standards de forme  $\lambda/\mu$

$T| [k]$  : le tableau de Young standard obtenu du tableau  $T$  par restriction au cases occupées par les éléments de l'ensemble  $[k]$

$T| [k + 1, n]$  : le tableau gauche standard obtenu du tableau  $T$  par restriction au cases occupées par les éléments de l'ensemble  $\{k + 1, \dots, n\}$

$t_w$  : le tableau de Young standard obtenu de l'arrangement  $\mathbf{a}_w$  par la méthode de van Leeuwen

$t_{ij} = t(i, j)$  : l'élément dans la case du tableau  $t$  située dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

$u^{I'}$  : le mot de Yamanouchi  $u$  transposé

$(u)_{u^T}$  : le bimot obtenu des deux mots de Yamanouchi  $u$  et son transposé  $u^T$

$u^{ev}$  : le mot de Yamanouchi  $u$  évacué

$(u, v) * (u', v')$  : la paire de mots de Yamanouchi obtenue à partir des deux paires de mots de Yamanouchi  $(u, v)$  et  $(u', v')$

$u * v = uv$  : le mot de Yamanouchi obtenu des deux mots de Yamanouchi  $u$  et  $v$  par concaténation

$(u, v)$  : une paire de mots de Yamanouchi

$V : J^P(Q)$  : le tableau gauche standard obtenu en remplissant les cases évacuées pendant la construction de  $J^P(Q)$  par les mêmes éléments qui occupent les cases de  $P$

$V : J^P(Q)$  : le tableau gauche standard obtenu en remplissant les cases évacuées pendant la construction de  $J_P(Q)$  par les mêmes éléments qui occupent les cases de  $P$

$|w|$  : la longueur du mot  $w$

$|w|_x$  : le nombre d'occurrences de la lettre  $x$  dans  $w$

$w^* = a_n a_{n-1} \cdots a_1$  : l'image miroir de  $w = a_1 a_2 \cdots a_n$

$w|_K$  : le mot obtenu de  $w$  en supprimant toutes les lettres de  $w$  qui n'appartiennent pas à  $K$  où  $K \subseteq \mathbb{P}$

$w^{\text{compl}}$  : le complément de  $w$

$w^{-\emptyset}$  : le mot associé à l'arrangement  $\alpha_w^{-\emptyset}$

$w(\sigma)$  : le poids associé à la permutation  $\sigma$

$w(\alpha, \beta)$  : le poids associé à l'hypercarte  $(\alpha, \beta)$

$w_1 \leq w_2$  : si  $w_1 = a_1 a_2 \cdots a_n$  et  $w_2 = b_1 b_2 \cdots b_n$  et  $a_i \leq b_i$  pour tout  $i \in [n]$

$(x \leftarrow P)$  : le tableau obtenu par insertion (insertion colonne) de l'élément  $x$  dans le tableau  $P$

$x_n = \underbrace{12 \cdots (n-1)} \underbrace{12 \cdots (n-2) \cdots 12} \underbrace{1} \text{ tel que } |x_n|_i = n-i \text{ pour tout } i \in [n-1]$

$[x^n](P(x))$  : le coefficient de  $x^n$  dans le polynôme  $P(x)$

$[x^n y^m](Q(x, y))$  : le coefficient de  $x^n y^m$  dans le polynôme  $Q(x, y)$

$y_n = \underbrace{11 \cdots 1} \underbrace{22 \cdots 2} \cdots \underbrace{(n-2)(n-2)} \underbrace{(n-1)} \text{ tel que } |y_n|_i = n-i \text{ pour tout } i \in [n-1]$

$\mathcal{Y}$  : l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi

$\mathcal{Y}_n$  : l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi de longueur  $n$

$\mathcal{Y}_{n,\lambda}$  : l'ensemble de tous les mots de Yamanouchi de longueur  $n$  et de forme  $\lambda$

$\mathbb{Z}$  : l'ensemble des entiers relatifs

$\sigma = x_1 \dots x_n$  : une permutation de  $\mathcal{S}_n$  vue comme un mot en les lettres  $1, \dots, n$

$(\sigma, i)$  : une permutation pointée  $\sigma$  ayant l'élément  $i \in [n]$  comme élément distingué

$\sigma^{-1}$  : l'inverse de la permutation  $\sigma$

$\sigma \circ \tau$  : la permutation composée des deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$

$\sigma T$  : le tableau obtenu du tableau  $T$  en remplaçant chaque élément  $j$  par  $\sigma(j)$

$\varphi_n(t)$  : le mot de Yamanouchi dans  $\mathbb{N}^*$  associé au tableau standard  $t$  à  $k$  éléments tel que  $k \leq n$

$\omega(T)$  : le mot de Yamanouchi associé au tableau de Young standard  $T$

$\omega^{-1}(u)$  : le tableau de Young standard associé au mot de Yamanouchi  $u$

$\omega_g(g)$  : le suffixe d'un mot de Yamanouchi associé au tableau gauche standard  $g$



$\omega_{0,n}$  : l'unique permutation du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  de longueur maximale

$\stackrel{P}{\cong}$  :  $P$ -équivalence

$\stackrel{Q}{\cong}$  :  $Q$ -équivalence

$\stackrel{K}{\cong}$  : la relation de Knuth

$\stackrel{K^*}{\cong}$  : la relation de Knuth duale

$\stackrel{*}{\cong}$  : la relation d'équivalence duale entre les tableaux de Young standards

$\stackrel{1}{\cong}$  : la relation de Knuth du premier genre

$\stackrel{2}{\cong}$  : la relation de Knuth du second genre

$\stackrel{1^*}{\cong}$  : la relation de Knuth duale du premier genre

$\stackrel{2^*}{\cong}$  : la relation de Knuth duale du second genre

$(\alpha, \beta)$  : une hypercarte

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$[(\cdot)^*]^{\text{compl}}$  : la bijection de  $\mathcal{S}_n$  vers  $\mathcal{S}_n$  qui associe à chaque permutation  $\sigma$  la permutation  $[(\sigma)^*]^{\text{compl}}$

$\delta_k$  : une promotion

$\delta^k$  : une promotion inverse

# Index

- $P$ -équivalence, 33
- $P$ -symbole, 28
- $Q$ -équivalence, 35
- $Q$ -symbole, 28
- Équivalence duale, 51
- Algorithme
  - d'évacuation d'un mot de Yamanouchi, 111
  - d'évacuation d'un tableau de Young standard, 54
  - d'insertion, 24
  - de Schensted, 27, 29, 141
  - de suppression, 26
  - de suppression du plus petit élément, 53
  - de transposition d'un mot de Yamanouchi, 104
- Anti-record, 277
  - exclusif, 277
- Arrangement, 80
- Bijection
  - d'Ossona de Mendez et Rosenstiehl, 282
  - de Dress et Franz, 276
  - de Sillke, 277
- Bimot de Yamanouchi, 106
- Carré
  - des insertions, 125
  - des suppressions, 137
- Classe
  - coplaxique, 36
  - plaxique, 34
- Coin
  - extérieur, 13
  - intérieur, 12
- Complément d'un mot, 66
- Composition, 19
- Congruence
  - coplaxique, 36
  - plaxique, 34
- Construction géométrique de Viennot, 36
- Diagramme, 10
  - conjugué, 10
  - de Ferrers, 10
  - gauche, 13
  - gauche normal, 13
- Fonction
  - d'insertion, 115
  - de suppression, 127
- Formule des équerres, 22
- Glissement sur un mot

- en arrière, 108
  - en avant, 108
- Glissement sur un tableau
  - en arrière, 47
  - en avant, 47
- Groupe
  - de Coxeter, 18
  - symétrique, 18
- Hypercarte
  - étiquetée, 268
  - étiquetée pointée, 270
  - non étiquetée, 269
  - pointée, 271
- Image miroir, 60
- Indice d'une lettre, 60
- Insertion
  - colonne, 30
  - ligne, 24
- Jeu de taquin
  - de Schützenberger, 47, 107
- Lettre
  - extérieure, 107
  - intérieure, 107
- Ligne saillante, 39
- Mot de Yamanouchi, 62
- Mot de Yamanouchi sur  $[k]$ , 63
- Ombre
  - d'un point de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , 38
  - d'une partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , 39
- Ordre
  - croisé, 10
  - naturel, 9
- Paire de Yamanouchi, 95
  - décomposable, 100
  - indécomposable, 100
- Partage, 12
- Permutation
  - connexe, 98, 272
  - pointée, 273
- Point saillant, 39
  - supérieur droit, 40
- Préfixe, 60
- Quasi-permutation, 37
- Record, 276
- Redressement
  - d'un mot, 177
  - d'un tableau gauche standard, 50
- Relation
  - de Knuth, 34
  - de Knuth du premier genre, 33
  - de Knuth du second genre, 33
  - de Knuth duale, 36
  - de Knuth duale du premier genre, 35
  - de Knuth duale du second genre, 35
- Saillie, 159

Sous-groupe

de Young, 19

parabolique, 19

Squelette, 42

Squelettes successifs, 44

Standardisation

à droite, 66

à gauche, 65

Suffixe, 60

Suite de glissements

sur un mot, 111

sur un tableau gauche standard, 50

Tableau, 14

de Young, 14

de Young standard, 15

gauche, 16

gauche de Young standard , 17

gauche semi-standard, 16

gauche standard, 17

semi-standard, 15

standard, 15

Traînée, 48

inverse, 49

Treillis de Young, 12

## RÉFÉRENCES

- Bergeron, F. 2005. « Combinatoire algébrique ». Cours spéciaux de l'UQAM, Montréal, Maîtrise et Doctorat.
- Blessenohl, D. et A. Jöllenbeck. 1999. « Variation über ein Thema von Knuth, Robinson, Schensted und Schützenberger », *Proc. ALCOMA 1999*, Gössweintein, Germany, p. 55-66.
- . 2005. « Noncommutative character theory of the symmetric group », Imperial College Press, London.
- Comtet, L. 1974. « Advanced Combinatorics », D. Reidel, Dordrecht.
- Cori, R. 2008. « Indecomposable Permutations, Hypermaps and Labeled Dyck Paths », Preprint, arXiv :0812.0440, 30 p., to appear in *J. Combin. Theory, ser. A*.
- . 2009. « Hypermaps and indecomposable permutations », *European Journal of Combinatorics*, no. 30, p. 540-541.
- Desgroseilliers M., B. Larose, C. Malvenuto et C. Vincent. 2009. « Some results on two conjectures of Schützenberger », p. 1-12.
- Dress A. W. M. et R. Franz. 1985. « Parametrizing the subgroups of finite index in a free group and related topics », *Bayreuther Mathematische Schriften*, no. 20, p. 1-8.
- . 1987. « Zur Parametrisierung von Untergruppen freier Gruppen », *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, no. 24, p. 125-134.
- Dulucq S. et B. E. Sagan. 1995. « La correspondance de Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants gauches », *Discrete Mathematics*, no. 139, p. 129-142.
- Dumont, D. et G. Kreweras. 1986. « Sur le développement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en termes de records et anti-records dans les permutations », Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 14-ème session, Publ. I.R.M.A. Stasbourg, p. 67-74.
- Favreau, L. 1991. « Combinatoire des tableaux ascillants et des polynômes de Bessel », Thèse, LaBRI Université Bordeaux I.

- Foata, D. 1976. « Une propriété de vidage-remplissage des tableaux de Young », In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, Springer-Verlag, p. 121-135.
- Foata, D. et G.-N. Han. 2009. « New permutation coding and equidistribution of set-valued statistics », *Theoretical Computer Science*, 00 :1-13.
- Fulton, W. 1997. « Young Tableaux », Cambridge University Press.
- Garcia, A. M. et J. Remmel. 1985. « Shuffles of Permutations and the Kronecker Product », *Graphs and Combinatorics* 1, 217-263.
- Geck, M. et G. Pfeiffer. 2000. « Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras », *London Math. Soc. Mon. New series*, 21.
- Goulden, I. P. et D. M. Jackson 1983. « Combinatorial Enumeration », John Wiley, New York.
- Greene, C. 1974. « An extension of Schensted's Theorem », *Advances in Math.*, no. 14, p. 254-265.
- Haiman, M. D. 1992. « Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor », *Discrete Math.*, no. 99, p. 79-113.
- Hall, M. 1959. « The Theory of Groups », Macmillan, New York.
- . 1948. « Subgroups of finite index in free groups », p. 187-190.
- Knuth, D. E. 1970. « Permutations, matrices and generalized Young tableaux », *Pacific Journal of Math.*, no. 34, p. 709-727.
- . 1988. « The art of computer programming : Sorting and searching », Vol. 3, 2. ed.-Reading[Mass.] Addison-Wesley.
- Lascoux, A. et M.-P. Schützenberger. 1981. « Le monoïde plaxique », in : *Noncommutative Structures in Algebra and Geometric Combinatorics* (A. de Luca, ed.), CNR, Roma, p. 129-156.
- van Leeuwen, M. A. A. 1996. « The Robinson-Schensted and Schützenberger algorithms, an elementary approach », *Electronic J. of Combinatorics.*, 3, no. 2, R15, 32.
- Littlewood, D. E. et A. R. Richardson. 1934. « Group characters and algebra », *Phil. Trans. Royal Soc.*, London. A233, p. 99-141.
- Lothaire, M. 1983. « Combinatorics on Words », (Encyclopedia of Math. and its Appl., 17), Addison-Wesley, Reading.

- Macdonald, I. G. 1995. «Symmetric Functions and Hall Polynomials», 2nd edition, Oxford University Press, Oxford.
- Malvenuto, C. et C. Reutenauer. 1994. «Evacuation of Labelled Graphs», *Discrete Mathematics*, no. 132, p. 137-143.
- . 1995. «Duality between Quasi-Symmetric Functions and the Solomon Descent Algebra», *Journal of Algebra*, no. 177, p. 967-982.
- . 2009. «Hopf algebras on double partially ordered sets».
- Moszkowski, P. 1995. «An Alternative Presentation of the Schensted Correspondence», *Europ. J. Combinatorics*, no. 16, p. 65-69.
- Ossona de Mendez P. et P. Rosenstiehl. 2004. «Transitivity and connectivity of permutations», *Combinatorica.*, 24 :487-502.
- Poirier, S. et C. Reutenauer. 1995. «Algèbres de Hopf de tableaux», *Ann. Sci. Math.*, Québec, 19, no. 1, p. 79-90.
- Reifegerste, A. 2004. «Permutation sign under the Robinson-Schensted Correspondence», *Ann. Comb.*, no. 8, 1, p. 103-112.
- Reutenauer, C. 2008. «Le jeu de taquin de Schützenberger», *Gaz. Math.*, no. 116, p. 5-10.
- Robinson, G. de B. 1938. «On the representations of the symmetric group», *Amer. J. Math.*, no. 60, p. 745-760.
- Sagan, B. E. 1979. «An analog of Schensted's Algorithm for Shifted Young Tableaux», *J. Combinatoric Theory*, (A), no. 27.
- . 2001. «The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions», (Second Edition), Springer, New York.
- Schensted, C. 1961. «Longest increasing and decreasing subsequences», *Canad. J. Math.*, no. 13, p. 179-191.
- Schützenberger, M.-P. 1963. «Quelques remarques sur une construction de Schensted», *Math. Scand.*, no. 12, p. 117-128.
- . 1972. «Promotion des morphismes d'ensembles ordonnés», *Discrete Mathematics*, no. 2, p. 73-94.
- . 1976. «Evacuations», *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Rome 1973)*, Tomo I, Atti dei Convegni Lincei, no. Accad. Naz. Lincei, Rome.

- . 1977. « La correspondance de Robinson », In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, Springer-Verlag, p. 59-113.
- Sillke, T. 1989. « Zur Kombinatorik von Permutationen », *European Journal of Combinatorics*, no. 10, p. 103-110.
- . 1991. « Ljk Gwdhirurokbb atn Degoeoathzre », Diplomarbeit, Bielefeld.
- . 1992. « Eine Bijektion zwischen Untergruppen freier Gruppen und Systemen konnexer Permutationen », PhD thesis, Univ. Bielefeld Fakultät für Mathematik.
- Stanley, R. P. 1997. « Enumerative Combinatorics », Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- . 1999. « Enumerative Combinatorics », Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Thomas, G. P. 1976. « A generalization of a construction due to Robinson », *Can. J. Math.*, Vol. XXVIII, no. 3, p. 665-672.
- . 1977. « On a construction of Schützenberger », *Discrete Math.*, no. 17, p. 107-118.
- . 1978. « On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions », *Advances in Mathematics.*, no. 30, p. 8-32.
- Viennot, G. 1977. « Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted », In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, Springer-Verlag, p. 29-58.
- Young, A. 1902. « On quantitative substitutional analysis II », *Proc. London Math. Soc. (1)*, no. 34, p. 361-397.
- Zeng, J. 1987. « Records, Antirecords et Permutations Discordantes », Séminaire Lontharingien de Combinatoire, 15-ème session, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, p. 121-128.